代数拓扑引言

Nicolas Keng

2024 年 3 月 22 日

20 世纪的数学与此前的数学相比, 最显著的特点就是整体性. 粗糙地说, 20 世纪前的数学都是"局部的"数学, 即使涉及整体的研究对象 (如射影空间) , 也是采用局部的研究方法. 研究整体性的根本方法是从拓扑学的建立开始的. 而关于整体结构的研究, 是在此前关于局部结构的研究已经相当成熟的基础上产生的.

我们想用本文来大概介绍一点代数拓扑的历史, 以及这种抽象的语言究竟是为了解决什么. 首先我们需要对基础的群论和点集拓扑有了解, 这些内容仅包括: 基础的群与群同态的定义与性质, 拓扑空间与连续映射的定义与性质. 自然作为科普我们不追求完全的严格性, 但仍会有无法直观说明的观点.

主要参考的是我在阅读与复习 Hatcher, Algebraic Topology 前两章的时候的笔记, 因此本文仅以大纲形式展现了若干基础但核心的内容且尽量不使用范畴语言, 且几乎所有细节均没有被补全. 同调部分还参考了李克正在《交换代数与同调代数》一书中的引言, 这是大师之作. 关于一些其他的介绍可以参阅 tom Dieck 代数拓扑的前言.

我们默认讨论拓扑空间上的连续函数. 从甜甜圈的结构说起:

定义 1.1 定义环面 (torus) $T := S^1 \times S^1$.

先从局部谈起. 考虑几个局部问题:

1. 球面, 环面上分别有几种圆?
2. 球面, 环面为什么局部来看一样, 整体来看不一样?
3. 怎么在数学上描述这种区别?

如何刻画这种不一样? 我们从两方面考虑:

1. 几何直观上的分类: 球面能不能变形到环面;
2. 代数结构上的分类: 环面有一个洞但球面没有.

前者引出同伦, 后者引出同调.

何谓同伦

同伦论研究的是拓扑空间之间的连续变形关系, 基本思想是通过连续变形将一个拓扑空间变到另一个拓扑空间, 从而表达这两空间之间存在的某种连续等价关系.

同伦的概念来源于拓扑学的核心话题: 了解所有的拓扑空间的结构和所有拓扑空间之间的连续映射. 这显然是不现实的; 所以我们自然尝试现将其分类.

例 1.1 考虑一个圆到另一个圆的连续映射: $\varphi : S^1 \to S^1$.

例 1.2 考虑圆到环面的连续映射: $S^1 \to T = S^1 \times S^1$.

定义 1.2 考虑 $f, g : X \to Y$, 若存在连续函数 $H : X \times [0, 1] \to Y$, 使得

$$\forall x \in X, \quad (x, 0) \mapsto f, \quad (x, 1) \mapsto g,$$

则称 f, g 同伦 (homotopy).

命题 1.1 同伦是一种等价关系且保复合.

定义 1.3 定义 $X \to Y$ 的同伦类 $[X, Y] := \{f : X \to Y\}/\sim, \sim$ 为同伦等价.

定义 1.4 (1st homotopy group) 以 x_0 为基点的基本群 (fundamental group) $\pi_1(x, x_0)$ 是固定在 x_0 上闭道路类全体的集合, 逆是反向道路, 乘法是单点并.

例 1.3 两个 S^1 的单点并 $S = S_1^1 \vee S_2^1$ 的基本群: 两个生成元的自由群.

定义 1.5 高阶同伦群:

$$\pi_n(X, x_0) := \{f : (S^n, *) \to (X, x_0)\} \,/ \sim .$$

定理 1.1 函子性: π_1 视为函子 $\mathsf{Top}_* \to \mathsf{Grp}$ 的函子; 它也是 $\mathsf{hTop}_* \to \mathsf{Grp}$ 的函子, 这说明它是同伦不变量.

何谓同调

同调研究的是拓扑空间之间的不变性, 通过代数方法刻画拓扑空间的结构. 同调的研究起源于整体性和局部性的区别.

定义 1.6 对于任意 $n+1$ 个点 $v_0, \cdots, v_k$, 若诸 $v_i - v_0$ 均线性无关, 则称包含它们的最小凸集为 k-单形 (simplex), 点 v_i 称为其顶点.

等价定义: k-单形中的点 x 等价于其能写为线性组合

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

定义 1.7 定义拓扑空间 X 的一个单纯剖分由一个单纯复形 K 和一个同胚 $K \to X$ 组成; 这里单纯复形 K 是 Euclid 空间内的一组有限多个单形.

由单形搭建复形是有一定规则的, 即其在满足于 K 封闭的同时也要使两个单形的交是其公共面.

定义 1.8 若 X 与单点集 $*$ 同伦等价, 则称 X 可缩 (contractible).

例 1.4 S^2, T 的单纯剖分.

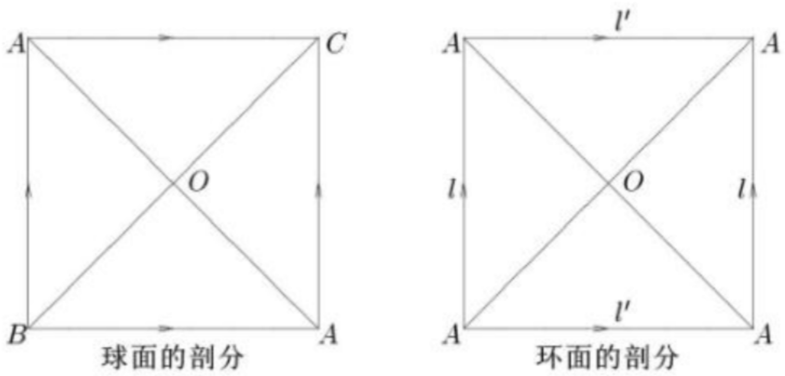

图 1: S^2, T 的单纯剖分

单纯复形范畴可以看作偏序范畴的一种. 对复形的定向无非是对顶点的排序, 而排序本质上只有两种, 即由偶置换确定的同构类.

定义 1.9 对单纯形 σ 的顶点集 $\{v_0, \ldots, v_p\}$, 定义它在偶置换下的同构类为 $[v_0, \ldots, v_p]$, 就称它是复形 σ 的一个定向.

定义 1.10 称 K 是一个定向复形, 若 $\forall \sigma \in K, \sigma$ 是有定向的. 并记

$$S_p^+(K) := \{\sigma \in K \mid \dim \sigma = p\}, \qquad S_p(K) = \left\{\pm\sigma \mid \sigma \in S_p^+(K)\right\}.$$

定理 1.2 由 $S_p^+(K)$ 作为生成元可以生成一个自由 Abel 群, 记作

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in S_p^+(K)} n_\sigma \sigma \right\},$$

这里为有限和. $C_p(K)$ 称作 p-链群, 它能表示为

$$C_p(K) = \{c_p : S_p(K) \to \mathbb{Z}\},$$

这里 p-链 c_p 仅在 $S_p(K)$ 中有限个元素上取非零值, 且 $\forall \sigma \in S_p(K)$ 都有 $c_p(-\sigma) = -c_p(\sigma)$.

定义 1.11 称

$$\partial : C_p(K) \to C_{p-1}(K), \qquad c_p = \sum_{\sigma \in S_p^+(K)} n_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in S_p^+(K)} n_\sigma \partial \sigma$$

是 $C_p(K)$ 上的边缘算子, 有时为了强调也记作 ∂_p. 它是 $C_p(K)$ 到 $C_{p-1}(K)$ 的群同态, 其中 $\partial\sigma$ 如下定义: 对 $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$, 有

$$\partial[v_0, \ldots, v_p] = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p].$$

定理 1.3 $\partial^2 = 0$. 严格地讲, 应该写成 $\partial_{p-1}\partial_p = 0$.

证明概要 任取 $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$, 计算

$$\begin{aligned}
\partial^2\sigma &= \partial \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p] \right) \\
&= \sum_{j<k} (-1)^k (-1)^j [\ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_k, \ldots] + \sum_{j>k} (-1)^k (-1)^{j-1} [\ldots, \hat{v}_k, \ldots, \hat{v}_j, \ldots] \\
&= \sum_{j<k} (-1)^{k+j} [\ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_k, \ldots] + \sum_{j<k} (-1)^{k+j-1} [\ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_k, \ldots] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

于是命题得证. □

定义 1.12 对 (链复形) $\mathcal{C}(K) = \{(C_p(K), \partial_p\}$, 即一列映射

$$\xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0}$$

对 $\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$, 称

$$Z_p(K) := \operatorname{Ker} \partial_p = \{c_p \in C_p(K) \mid \partial c_p = 0\}$$

是 K 的 p 维闭链群;

$$B_p(K) := \operatorname{Im} \partial_{p+1} = \{\partial c_{p+1} \in C_p(K) \mid c_{p+1} \in C_{p+1}(K)\}$$

是 K 的 p 维边缘链群. 满足 $B_p(K) \lhd Z_p(K)$, 且 $B_p(K)$ 和 $Z_p(K)$ 仍是自由 Abel 群. 称

$$H_p(K) = \operatorname{Ker} \partial_p / \operatorname{Im} \partial_{p+1} = Z_p(K)/B_p(K)$$

是 K 的 p 阶同调群.

在 $Z_p(K)$ 上可以定义等价关系:

$$\begin{aligned} z_p \sim z_p' &\iff z_p + B_p(K) = z_p' + B_p(K) \\ &\iff z_p - z_p' + B_p(K) = 0 \\ &\iff \exists d \in C_{p+1}(K), \quad (\partial d = z_p - z_p'), \end{aligned}$$

这一等价关系称作同调关系, 确定的等价类 $\bar{z}_p$ 称作同调类.

命题 1.2 设 K 是道路连通复形, 则 $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

最后我们回到 2 维闭曲面.

例 1.5 环面 T^2 的同调群:

$$H_p(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 1.6 Klein 瓶 S 的同调群:

$$H_p(S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), & p = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

奇异同调: 定义在拓扑空间范畴 Top 上的同调理论, 克服了单纯同调依赖于三角剖分和几何直观的困难.

拓展

定理 1.4 (Brower) 拓扑空间 Ω 上自连续映射 $f:\Omega\to\Omega,\ p\mapsto q$ 至少有一个不动点.

同调和同伦在某种程度上是一码事. 一个例子:

定理 1.5 (Hurewicz) 设 X 是道路连通空间, 则其 k-同伦群的 Abel 化同构于它的 k-单纯同调群:

$$\pi_1(X)^{\mathrm{ab}}\cong H_1(X),\quad \pi_n(X)\cong H_n(X).$$

同调无非是链复形范畴 $\mathsf{Ch}(R)$ 赋予无穷范畴结构之下的同伦; 而导出范畴 (同伦范畴) 本质上也是无穷范畴 (模型范畴) 的局部化 (Dwyer-Kan). 于是使用同伦代数的语言, 通过相应的模型范畴或 $(\infty,1)$-范畴, 代数拓扑和同调代数可以视为同伦代数的两个特例. 当然这种叙述是不十分严谨的, 但是其揭示了代数拓扑和同调代数之间的关系, 即他们被无穷范畴与高阶同伦代数的语言所统一, 这是现今数学发展的最为火热与现代的门类.

定义 1.13 严格 2-范畴是充实于 Cat 的范畴, 严格 n-范畴为充实于 $(n-1)$-范畴的范畴.

这里充实范畴是由张量范畴 (张量积, 单位, 三角形公理, 五边形公理) 导出. 于是

定义 1.14 (n,r)-范畴指一个 n-范畴, 其中所有 $r+1,r+2,\ldots,n$-态射都可逆.

可逆实际上指的是相差同伦的意义下可逆, 也就是具有同伦逆.

例 1.7 $(-2,0)$-范畴是单点集, 可以视为 "真"; $(-1,0)$-范畴是 $\varnothing$ 或真假值; $(0,0)$-范畴是集合; $(0,1)$-范畴是偏序集.

0-态射是对象; 1-态射是态射; 2-态射是同伦.

我们可以利用模型范畴将上述信息额外包含. 这就是所谓的同伦代数的后话了.