彭家贵微分几何习题

202100091102　基地班　耿浩源

2024/1/9

目录

Week 2

2.1. 求下列曲线的弧长与曲率:

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(4) $\boldsymbol{r}(t)=\left(t, a\cosh\dfrac{t}{a}\right)(a>0)(t\in\mathbb{R})$.

证明概要 (2) 设 $a>0, b>0$, 椭圆曲线 (去掉点 $(a,0)$) 的参数表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, b\sin t)(0<t<2\pi).$$

直接计算, 有

$$\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t, b\cos t),\quad \boldsymbol{r}''(t)=(-a\cos t, -b\sin t)$$

弧长为

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u=\begin{cases} at, & a=b;\\ \text{第一类椭圆积分}, & a\neq b.\end{cases}$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(4) 直接计算, 有

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right),\quad \boldsymbol{r}''(t)=\left(0,\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

弧长

$$s=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{u}{a}}\,\mathrm{d}u=\int_0^t\cosh\frac{u}{a}\,\mathrm{d}u=a\sinh\frac{t}{a}.$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh\frac{t}{a}}{a\left(1+\sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

□

2.2. 设曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$, 证明它的曲率是

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

证明概要 首先

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(x'(t),y'(t)\right),\quad \boldsymbol{r}''(t)=\left(x''(t),y''(t)\right)$$

设 s 是曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长参数. 则 $s=s(t)$ 与 $t=t(s)$ 互为反函数.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\boldsymbol{r}'(t)\right|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2},\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$$

$$\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=-\frac{x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^2}$$

由于平面曲线的 Frenet 标架和曲率与 (同向的容许) 参数选择无关, 故

$$\boldsymbol{t}(t) := \boldsymbol{t}(s(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right).$$

从而,

所以,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{t}}(s(t)) &= \boldsymbol{r}''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{r}'(t)\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2}\\ &= \left(-\frac{y'(t)\left(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\right)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^2}, \frac{x'(t)\left(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\right)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^2}\right)\\ \boldsymbol{n}(t) := \boldsymbol{n}(s(t)) &= \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right).\end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \kappa(s(t)) = \langle \dot{\boldsymbol{t}}(s(t)), \boldsymbol{n}(s(t))\rangle = \frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

□

2.3. 设曲线 C 在极坐标 (r,θ) 下的表示为 $r=f(\theta)$, 证明 C 的曲率是

$$\kappa(\theta) = \frac{f^2(\theta)+2\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 - f(\theta)\frac{d^2f}{d\theta^2}}{\left(f^2(\theta)+\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

证明概要 曲线 C 有参数表示式 $\boldsymbol{r}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$. 直接计算, 有

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = \left(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\right),$$

$$\boldsymbol{r}''(\theta) = (f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta, f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta).$$

由习题 2 , 有

$$\kappa(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta)}{\left(x'(\theta)^2+y'(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f^2(\theta)+2f'(\theta)^2-f(\theta)f''(\theta)}{\left(f^2(\theta)+(f'(\theta))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

□

2.4. 求下列曲线的曲率和挠率:

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (a\cosh t, a\sinh t, bt)(a>0)$;

(4) $\boldsymbol{r}(t) = \left(at, \sqrt{2}a\log t, \frac{a}{t}\right)(a>0)$.

证明概要 (1) 直接计算, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t) &= (a\sinh t, a\cosh t, b)\\ \boldsymbol{r}''(t) &= (a\cosh t, a\sinh t, 0)\\ \boldsymbol{r}'''(t) &= (a\sinh t, a\cosh t, 0).\end{aligned}$$

从而,

$$\left|\boldsymbol{r}'(t)\right| = \sqrt{a^2\cosh 2t + b^2}$$
$$\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t) = \left(-ab\sinh t, ab\cosh t, -a^2\right)$$
$$\left|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)\right| = a\sqrt{b^2\cosh 2t + a^2}$$
$$\left(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t)\right) = \left\langle\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t)\right\rangle = a^2b$$

故曲率

挠率

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{a\sqrt{b^2\cosh 2t + a^2}}{(a^2\cosh 2t + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|^2} = \frac{b}{b^2\cosh 2t + a^2}$$

(4) (注意到 $t\in(0,+\infty)$). 直接计算, 得

从而,

$$\boldsymbol{r}'(t) = \left(a, \frac{\sqrt{2}a}{t}, -\frac{a}{t^2}\right), \boldsymbol{r}''(t) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}a}{t^2}, \frac{2a}{t^3}\right), \boldsymbol{r}'''(t) = \left(0, \frac{2\sqrt{2}a}{t^3}, -\frac{6a}{t^4}\right).$$

$$\left|\boldsymbol{r}'(t)\right| = \frac{a\left(t^2+1\right)}{t^2}\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t) = \left(\frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}, -\frac{2a^2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2}\right)\left|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)\right| = \frac{\sqrt{2}a^2\left(t^2+1\right)}{t^4}$$

故曲率

$$\left(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t)\right) = \left\langle\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t)\right\rangle = \frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}t^2}{a\left(t^2+1\right)^2}$$

挠率

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|^2} = \frac{\sqrt{2}t^2}{a\left(t^2+1\right)^2}$$

□

2.5. 证明: E^3 中的正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率和挠率分别是

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$
$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|^2}$$

证明概要 设 s 是曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长参数. 则 $s=s(t)$ 与 $t=t(s)$ 互为反函数. 计算,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(t) := \boldsymbol{t}(s(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}(t(s))}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{r}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \\
\dot{\boldsymbol{t}}(s(t)) = \boldsymbol{r}''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{r}'(t)\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2}, \quad \boldsymbol{n}(s(t)) = \frac{1}{\kappa(s(t))}\dot{\boldsymbol{t}}(s(t)), \\
\ddot{\boldsymbol{t}}(s(t)) = \boldsymbol{r}'''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 + 3\boldsymbol{r}''(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2} + \boldsymbol{r}'(t)\frac{d^3t}{\mathrm{d}s^3} \\
\boldsymbol{b}(s(t)) = \boldsymbol{t}(s(t)) \wedge \boldsymbol{n}(s(t)) = \frac{1}{\kappa(s(t))}\boldsymbol{t}(s(t)) \wedge \dot{\boldsymbol{t}}(s(t)) \\
= \frac{1}{\kappa(s(t))}\boldsymbol{r}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \wedge \left(\boldsymbol{r}''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{r}'(t)\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2}\right) \\
= \frac{1}{\kappa(s(t))}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)
\end{aligned}
$$

从而, 曲率

$$
\kappa(t) = \kappa(s(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \left|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)\right| = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}
$$

由于 $\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$, 故

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{t}}(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)\dot{\boldsymbol{n}}(s) = \dot{\kappa}(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)) \\
&= -\kappa(s)^2\boldsymbol{t}(s) + \dot{\kappa}(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s).
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\begin{aligned}
\kappa(s(t))\tau(s(t)) = \langle \ddot{\boldsymbol{t}}(s(t)), \boldsymbol{b}(s(t)) \rangle \\
= \left\langle \boldsymbol{r}'''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 + 3\boldsymbol{r}''(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{d^2t}{\mathrm{d}s^2} + \boldsymbol{r}'(t)\frac{d^3t}{\mathrm{d}s^3}, \frac{1}{\kappa(s(t))}\boldsymbol{t}(s(t)) \wedge \dot{\boldsymbol{t}}(s(t)) \right\rangle \\
= \frac{1}{\kappa(s(t))}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^6 \left(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)\right)
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\tau(t) = \tau(s(t)) = \frac{1}{\kappa(t)^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|^6}\left(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)\right) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|^2}
$$

□

2.7. 设曲线

$$
\boldsymbol{r}(t) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0\right), & t < 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \\ \left(0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}\right), & t > 0 \end{cases}
$$

(1) 证明: $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ 是一条正则曲线, 且在 $t=0$ 处曲率 $\kappa = 0$;

(2) 求 $\boldsymbol{r}(t)(t \neq 0)$ 时的 Frenet 标架, 并讨论 $t \to 0$ 时, Frenet 标架的极限.

证明概要 (1) 首先注意到对任意正整数 k, $\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k)}=\dfrac{P_k(t)}{t^n k}e^{-\frac{1}{t^2}}$, 其中 n_k 是正整数, $P_k(t)$ 是关于 t 的一个多项式. 这由归纳法容易得到.

当 $t<0$ 时,

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}},1,0\right),\quad \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|=\left(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\boldsymbol{r}''(t)=\left(\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0\right),\quad \boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)=\left(0,0,\frac{6t^2-4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}}\right),$$

$$\boldsymbol{r}^{(k)}(t)=\left(\frac{P_k(t)}{t^{n_k}}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0\right)(k\geq 2).$$

由上知, $\boldsymbol{r}(t)(t<0)$ 是光滑的且 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, 即是正则的.

曲线在 $t=0$ 处的第 k-阶左导数为 $(k\geq 0)$

$$\boldsymbol{r}^{(k)}\left(0^-\right)=\lim_{t\to 0^-}\boldsymbol{r}^{(k)}(t)=\begin{cases}\mathbf{0}, & k\neq 1\\ (0,1,0), & k=1\end{cases}$$

类似地, 当 $t>0$ 时,

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(0,1,\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}\right),,\quad \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|=\left(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{r}''(t)=\left(0,0,\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}}\right),\quad \boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)=\left(\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0\right),$$

$$\boldsymbol{r}^{(k)}(t)=\left(0,0,\frac{P_k(t)}{t^{n_k}}e^{-\frac{1}{t^2}}\right)(k\geq 2)$$

故 $\boldsymbol{r}(t)(t>0)$ 是正则的.

曲线在 $t=0$ 处的第 k-阶右导数为 $\left(k\geq 0,\boldsymbol{r}^{(0)}=\boldsymbol{r}\right)$

$$\boldsymbol{r}^{(k)}\left(0^+\right)=\lim_{t\to 0^+}\boldsymbol{r}^{(k)}(t)=\begin{cases}\mathbf{0}, & k\neq 1\\ (0,1,0), & k=1\end{cases}$$
$$=\boldsymbol{r}^{(k)}\left(0^-\right).$$

因此, 曲线在 $t=0$ 处也是正则的. 综上, 曲线 $\boldsymbol{r}(t)(t\in\mathbb{R})$ 是正则的. 从而, 其曲率 (定义在 $\mathbb{R}$ 上) 是光滑的.

由习题 5 , 曲线 $\boldsymbol{r}(t)(t\neq 0)$ 的曲率为

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}=\frac{\left|6t^2-4\right|e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6\left(1+\frac{4}{t^6}e^{-\dfrac{2}{t^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\kappa(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是光滑的; 特别地, 在 $t=0$ 处是连续的. 故有

$$\kappa(0)=\lim_{t\to 0}\kappa(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\left|6t^2-4\right|e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6\left(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

(2) 曲线 $\boldsymbol{r}(t)(t \neq 0)$ 的 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}(t);\boldsymbol{t}(t),\boldsymbol{n}(t),\boldsymbol{b}(t)\}$, 其中

$$\boldsymbol{t}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},\quad \boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{t}(t)\wedge\boldsymbol{n}(t)=$$

故当 $t\to 0^-$ 时, 曲线的 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}\left(0^-\right)=\boldsymbol{0};\boldsymbol{t}\left(0^-\right),\boldsymbol{n}\left(0^-\right),\boldsymbol{b}\left(0^-\right)\}$, 其中

$$\boldsymbol{t}\left(0^-\right)=(0,1,0),\quad \boldsymbol{n}\left(0^-\right)=(1,0,0),\quad \boldsymbol{b}\left(0^-\right)=(0,0,-1)$$

而当 $t\to 0^+$ 时, 曲线的 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}\left(0^+\right)=\boldsymbol{0};\boldsymbol{t}\left(0^+\right),\boldsymbol{n}\left(0^+\right),\boldsymbol{b}\left(0^+\right)\}$, 其中

$$\boldsymbol{t}\left(0^+\right)=(0,1,0),\quad \boldsymbol{n}\left(0^+\right)=(0,0,1),\quad \boldsymbol{b}\left(0^+\right)=(1,0,0)$$

因此, 当 $t\to 0$ 时, 曲线的 Frenet 标架的极限不存在 (左、右极限存在但不相等). $\square$

Week 3

2.9. (1) 设 E^3 中曲线 C 的所有切线过一个定点, 证明 C 是直线.

(2) 证明: 所有主法线过定点的曲线是圆.

证明概要 (1) 设 P_0 是弧长参数曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线过的定点, 其位置向量为 p_0. 由假设,

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{p}_0=\lambda(s)\boldsymbol{t}(s),$$

其中 $\lambda(s)=\langle\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{t}(s)\rangle$ 是一个光滑函数. 对上式两边求导, 有

$$\boldsymbol{t}(s)=\lambda(s)'\boldsymbol{t}(s)+\lambda(s)\dot{\boldsymbol{t}}(s)=\lambda(s)'\boldsymbol{t}(s)+\lambda(s)\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$$

由于 $\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s)$ 处处线性无关, 有

$$\lambda(s)'=1,\quad \lambda(s)\kappa(s)=0.$$

从而, $\lambda(s)$ 不恒为 0 . 因此, 由 $\kappa(s)$ 的连续性, 知 $\kappa(s)\equiv 0$. 故, C 是直线.

(2) 设弧长参数曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的主法线过定点 P_0 (其位置向量为 $\boldsymbol{p}_0$). 则有 (注意: 假设了主法线存在, 故曲率恒不为 0)

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{p}_0=\lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$

其中 $\lambda(s)=\langle\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{n}(s)\rangle$ 是一个光滑函数. 对上式两边求导并应用 Frenet 公式, 有

$$\boldsymbol{t}(s)=\lambda(s)'\boldsymbol{n}(s)-\lambda(s)\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\lambda(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

由于 $\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)$ 处处线性无关, 有

$$1-\lambda(s)\kappa(s)=0,\quad \lambda(s)'=0,\quad \lambda(s)\tau(s)=0.$$

由 $\lambda(s)'=0$, 知 $\lambda(s)=\lambda$ 是常数. 而由 $1-\lambda(s)\kappa(s)=0$, 有 $\lambda\neq 0$ 且 $\kappa(s)=\dfrac{1}{\lambda}$ 是常数. 而 $\lambda(s)\tau(s)=0$, 故 $\tau(s)\equiv 0$. 因此, C 是平面曲线. 而由例 2.2, 知 C 是圆. □

12. 给定弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 它的曲率和挠率分别是 $\kappa=\kappa(s),\tau=\tau(s)$; $\boldsymbol{r}(s)$ 的单位切向量 $\boldsymbol{t}(s)$ 可看作单位球面 S^2 上的一条曲线, 称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切线像. 证明: 曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s):=\boldsymbol{t}(s)$ 的曲率、挠率分别是

$$\tilde{\kappa}(s)=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2},\tilde{\tau}(s)=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left(1+\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)}$$

证明概要 由 Frenet 公式, $\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)=\dot{\boldsymbol{t}}(s)=\kappa\boldsymbol{n}$. (故 $|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)|=\kappa$, s 未必是曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 弧长参数.) 将应用习题 5 计算曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 的曲率和挠率. 根据 Frenet 公式,

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''(s)=\dot{\kappa}\boldsymbol{n}+\kappa\dot{\boldsymbol{n}}=-\kappa^2\boldsymbol{t}+\dot{\kappa}\boldsymbol{n}+\kappa\tau\boldsymbol{b},$$
$$\tilde{\boldsymbol{r}}'''(s)=-3\kappa\dot{\kappa}\boldsymbol{t}+\left(\ddot{\kappa}-\kappa^3-\kappa\tau^2\right)\boldsymbol{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\boldsymbol{b}.$$

从而,

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}''(s) = \kappa^2\tau\boldsymbol{t} + \kappa^3\boldsymbol{b}, \quad \left|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}''(s)\right| = \kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2},$$

由习题 5 , 有

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}''(s)|}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)|^3} = \frac{\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa^3} = \sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$$

由于

$$\left(\tilde{\boldsymbol{r}}'(s), \tilde{\boldsymbol{r}}''(s), \tilde{\boldsymbol{r}}'''(s)\right) = \kappa^3(2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) - 3\kappa^3\dot{\kappa}\tau = \kappa^3(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}),$$

故有

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{(\tilde{\boldsymbol{r}}'(s), \tilde{\boldsymbol{r}}''(s), \tilde{\boldsymbol{r}}'''(s))}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}''(s)|^2} = \frac{\kappa^3(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau})}{\kappa^4\left(\kappa^2+\tau^2\right)} = \frac{\dfrac{\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}}{\kappa^2}}{\kappa + \dfrac{\tau^2}{\kappa}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left(1+\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)}$$

□

13. (1) 求曲率 $\kappa(s) = \dfrac{a}{a^2+s^2}$($s$ 为弧长参数) 的平面曲线;

证明概要 一般地, 给定曲率 $\kappa(s)$ (以 s 为弧长参数), 求解平面曲线的步骤如下:

设 $\boldsymbol{t}(s) = \dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s} = \left(\dfrac{dx(s)}{\mathrm{d}s}, \dfrac{dy(s)}{\mathrm{d}s}\right) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ (根据引理 1.2(p.156), 总存在这样的 $\theta(s)$ 且它至少是连续可微的), 则 $\kappa(s) = \langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle = \dfrac{d\theta}{\mathrm{d}s}$. 故

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\,\mathrm{d}t + c$$

其中 c 为常数. 从而,

因此,

$$\frac{dx(s)}{\mathrm{d}s} = \cos\left(\int_0^s \kappa(t)\,\mathrm{d}t + c\right),$$
$$\frac{dy(s)}{\mathrm{d}s} = \sin\left(\int_0^s \kappa(t)\,\mathrm{d}t + c\right)$$

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + c\Big) + c_1,$$
$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + c\Big) + c_2,$$

其中 c_1, c_2 是常数. 要求的平面曲线为

$$\boldsymbol{r}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + c\Big) + c_1, \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + c\Big) + c_2\right)$$

代入上述公式, 得要求的平面曲线 ($a>0$) :

(1) $\boldsymbol{r}(s) = \left(a\log\left(s+\sqrt{a^2+s^2}\right), \sqrt{a^2+s^2}\right)$ (及其与任意平面刚体运动的合成); □

15. 证明: 满足条件

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2 = \text{常数}$$

的弧长参数曲线, 或者是球面曲线, 或者 κ 是常数.

证明概要 假设弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率函数 κ 不是常数. 考虑向量场

$$\boldsymbol{p}(s)=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}+\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{b}.$$

求导数, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'(s)&=\boldsymbol{t}+\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{n}}+\left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\right)\boldsymbol{n}+\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\dot{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}+\frac{\tau}{\kappa}\boldsymbol{n}-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\boldsymbol{n}+\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\boldsymbol{n}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\boldsymbol{b}=\left(\frac{\tau}{\kappa}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\right)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

而已知 $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=$ 常数, 求导数, 得

$$-2\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^3}-2\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)=0.$$

由于 κ 不是常数, 故 $\dot{\kappa}$ 不恒为 0 . 由连续性, 得到

$$\frac{\tau}{\kappa}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\equiv 0.$$

因此, $\boldsymbol{p}'(s)=0$. 故 $\boldsymbol{p}(s)$ 是常向量, 记为 $\boldsymbol{p}_0$. 而

$$|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{p}_0|^2=\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2=\text{ 常数},$$

故曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在一个球面上. $\square$

Week 4

2.17. 求曲率和挠率满足 $\tau = c\kappa$(c 为常数, $\kappa > 0$) 的曲线.

证明概要 设要求解的空间曲线的弧长参数式为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.

(1) $c = 0$ 时, $\tau = 0$, 应用习题 13 的解中叙述过的一般方法求解, 最后求得两类空间曲线:

$$\boldsymbol{r}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + a\right) + c_1, \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + a\right) + c_2\right),$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + a\right) + c_1, -\int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u + a\right) + c_2\right).$$

(2) 假设 $c \neq 0$. 由 Frenet 公式, 有

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{n} \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b} \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{n} \end{cases}$$

作参数变换 $\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\,\mathrm{d}t$. 则 $d\theta = \kappa(s)\,\mathrm{d}s$. 可以改写为

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}(\theta)}{d\theta} = \boldsymbol{n}(\theta) \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}(\theta)}{d\theta} = -\boldsymbol{t}(\theta) + c\boldsymbol{b}(\theta) \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}(\theta)}{d\theta} = -c\boldsymbol{n}(\theta) \end{cases}$$

由此得到

$$\frac{d^2\boldsymbol{n}(\theta)}{d\theta^2} = -a^2\boldsymbol{n}(\theta)$$

其中 $a = \sqrt{1+c^2}$. 由常微分方程理论, 此方程有通解

$$\boldsymbol{n}(\theta) = \cos a\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin a\theta\boldsymbol{e}_2,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是常向量. 从而, 可以解出方程组 (8) 中的第一式, 得

$$\boldsymbol{t}(\theta) = \frac{1}{a}\left(\sin a\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos a\theta\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3\right),$$

其中 $\boldsymbol{e}_3$ 是常向量. 由方程组 (8) 中的第二式, 有

$$\boldsymbol{b}(\theta) = -\frac{c}{a}\left(\sin a\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos a\theta\boldsymbol{e}_2\right) + \frac{1}{a}\boldsymbol{e}_3.$$

由于 $s = 0$ 时 (即: $\theta(0) = 0$ 时), Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}(0); \boldsymbol{t}(0), \boldsymbol{n}(0), \boldsymbol{b}(0)\}$ 是右手系的且单位正交. 而易知

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(0) \\ \boldsymbol{n}(0) \\ \boldsymbol{b}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{a} & \dfrac{c}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{a} & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

其中的三阶矩阵是行列式为 1 的正交矩阵. 因此, 须选取 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 为右手系且单位正交. 最后, 由 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t}(s)$ 得到所要求的弧长参数曲线:

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \frac{1}{a}\left(\int_0^s \sin(a\theta(t))\,\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_1 - \int_0^s \cos(a\theta(t))\,\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_2 + cs\boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{v}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(\int_0^s \sin\left(\sqrt{1+c^2}\int_0^t \kappa(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_1 - \int_0^s \cos\left(\sqrt{1+c^2}\int_0^t \kappa(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_2 + cs\boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{v}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是常向量. □

2.19. 求沿弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的向量场 $\boldsymbol{v}(s)$, 同时满足以下各式:

$$\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s)$$
$$\dot{\boldsymbol{n}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s)$$
$$\dot{\boldsymbol{b}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{b}(s)$$

证明概要 首先, 向量场 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle \boldsymbol{t} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{n} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle \boldsymbol{b}$$

一方面, 由性质 1.1(1), 有

$$\boldsymbol{t} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}) = \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle \boldsymbol{n} = -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle \boldsymbol{n}$$

另一方面, 由假设及 Frenet 公式, 得

$$\boldsymbol{t} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t} \wedge \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t} \wedge (-\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b}) = -\tau \boldsymbol{n}$$

故有, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle = \tau$.

类似地,

$$0 = \boldsymbol{n} \wedge (\kappa \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \wedge \dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{t}) = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\rangle \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{t} = -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{t}$$
$$-\kappa \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} \wedge (\kappa \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{b} \wedge \dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{t}) = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}\rangle \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle \boldsymbol{t} = -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle \boldsymbol{t}$$

从而, 有 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle = 0, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle = \kappa$.

因此,

$$\boldsymbol{v} = \tau \boldsymbol{t} + \kappa \boldsymbol{b}$$

□

2.20. 证明: 曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ 与曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \left(2\cos\dfrac{t}{2}, 2\sin\dfrac{t}{2}, -t\right)$ 是合同的.

证明概要 曲线 $\tilde{r}(t)$ 是圆柱螺旋线. 从而, $\tilde{\kappa}(t) = \dfrac{1}{4}, \tilde{\tau}(t) = -\dfrac{1}{4}$.

现在考虑曲线 $\boldsymbol{r}(t)$. 直接计算, 有

$$\boldsymbol{r}'(t) = (1+\sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3} - \cos t), |\boldsymbol{r}'(t)| = 2\sqrt{2},$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = (-\sqrt{3}\sin t, -2\cos t, \sin t)$$
$$\boldsymbol{r}'''(t) = (-\sqrt{3}\cos t, 2\sin t, \cos t)$$
$$\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t) = (2\sqrt{3}\cos t - 2, -4\sin t, -2\sqrt{3} - 2\cos t), \left|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)\right| = 4\sqrt{2}$$
$$\big(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)\big) = -8$$

由习题 5, $\kappa(t) = \dfrac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \dfrac{1}{4}, \tau(t) = \dfrac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|^2} = -\dfrac{1}{4}$. 由唯一性, 曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ 相差 E^3 的一个刚体运动, 从而它们是合同的. □

3.1. 求下列曲面的参数表达式:

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (单叶双曲面);

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (双叶双曲面);

(5) $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (双曲抛物面或者马鞍面);

证明概要 一般地, 可以按照如下步骤得到一个二次曲面的标准方程的参数表达式:

第一步: 平截化归. 将某个变量看作一个常数, 则得到一个二次曲线的方程 (椭圆、双曲线或抛物线). 化归为标准方程并得到其参数表达式.

第二步: 消根号整理. 第一步得到的参数表达式一般有二次根号, 可以取适当参数消去根号并整理得到二次曲面的参数表达式.

(2) 多种参数表示:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\sec u\cos v, b\sec u\sin v, c\tan u)\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi\right);$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)(u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi);$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a(\cos u - v\sin u), b(\sin u + v\cos u), cv)(0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R});$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(a\sqrt{1+u^2}\cos v, b\sqrt{1+u^2}\sin v, cu\right)(u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi).$$

(3) 多种参数表示

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\tan u\cos v, b\tan u\sin v, c\sec u)\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi\right)$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u)(u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi)$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(a\sqrt{u^2-1}\cos v, b\sqrt{u^2-1}\sin v, cu\right)(|u| > 1, 0 < v < 2\pi).$$

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\left((u,v) \in \mathbb{R}^2\right)$$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(au\cos v, bu\sin v, u^2\right)(u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi).$$

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(u, v, -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\left((u,v) \in \mathbb{R}^2\right)$$

□

3.5. 设曲面 S 与平面 Π 相交于 P 点, 且 S 位于 Π 的同一侧, 证明: Π 是曲面 S 在 P 点的切平面.

证明概要 设曲面 S 的参数表达式为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v), P=\boldsymbol{r}\left(u_0,v_0\right)$. 设 $\boldsymbol{a}$ 是 Π 的非零法向量且指向曲面所在的一侧. 考虑曲面 S 的高度函数

$$h(u,v):=\left\langle\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}\left(u_0,v_0\right),\boldsymbol{a}\right\rangle.$$

由假设, P 是 $h(u,v)$ 的极小值点, 从而是它的临界点. 故

$$\begin{aligned}
h_u\left(u_0,v_0\right)&=\left\langle\boldsymbol{r}_u\left(u_0,v_0\right),\boldsymbol{a}\right\rangle=0,\\
h_v\left(u_0,v_0\right)&=\left\langle\boldsymbol{r}_v\left(u_0,v_0\right),\boldsymbol{a}\right\rangle=0.
\end{aligned}$$

即: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{r}_u\left(u_0,v_0\right)$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{r}_v\left(u_0,v_0\right)$. 从而, $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{n}\left(u_0,v_0\right)$. 而平面 Π 过点 P, 因此是 P 点的切平面. □

3.8. 求下列曲面的第一基本形式:

(1) 柱面: $\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u),g(u),v)$;

(2) 正螺旋面: $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,bv)$;

(3) 椭圆抛物面: $\boldsymbol{r}(u,v)=\big(a(u+v),b(u-v),u^2+v^2\big)$.

证明概要 (1) 由

$$\boldsymbol{r}_u=\left(f'(u),g'(u),0\right),\quad\boldsymbol{r}_v=(0,0,1)$$

有

$$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=f'(u)^2+g'(u)^2,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=1$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=\left(f'(u)^2+g'(u)^2\right)\mathrm{d}u^2+dv^2.$$

(2) 由

$$\boldsymbol{r}_u=(\cos v,\sin v,0),\quad\boldsymbol{r}_v=(-u\sin v,u\cos v,b),$$

有

$$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=1,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=u^2+b^2.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=\mathrm{d}u^2+\left(u^2+b^2\right)dv^2.$$

(3) 由

$$\mathrm{II}(u,v)=-2\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}\,\mathrm{d}udv,\boldsymbol{r}_u=(a,b,2u),\quad\boldsymbol{r}_v=(a,-b,2v)$$

有

$$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=a^2+b^2+4u^2,F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2-b^2+4uv,G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2+b^2+4v^2.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=\left(a^2+b^2+4u^2\right)\mathrm{d}u^2+2\left(a^2-b^2+4uv\right)\mathrm{d}udv+\left(a^2+b^2+4v^2\right)dv^2.$$

□

10. 设 $F_\lambda(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a-\lambda}+\dfrac{y^2}{b-\lambda}+\dfrac{z^2}{c-\lambda}(a>b>c>0)$. 当 $\lambda\in(-\infty,c)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族椭球面; $\lambda\in(c,b)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族单叶双曲面; $\lambda\in(b,a)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族双叶双曲面. 证明: 对 E^3 中任意一点 $P=(x,y,z)(xyz\neq 0)$, 恰有分别属于这三族曲面的三个二次曲面过 P 点, 且它们在 P 点相互正交.

证明概要 设点 $P=(x,y,z)(xyz\neq 0)$ 在曲面 $S_\lambda:\dfrac{x^2}{a-\lambda}+\dfrac{y^2}{b-\lambda}+\dfrac{z^2}{c-\lambda}=1$ 上. 考虑关于 λ 的三次多项式

$$f(\lambda)=(b-\lambda)(c-\lambda)x^2+(a-\lambda)(c-\lambda)y^2+(a-\lambda)(b-\lambda)z^2-(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

注意到 $f(-\infty)<0, f(c)>0, f(b)<0$ 且 $f(a)>0$. 故 $f(\lambda)$ 在区间 $(-\infty,c),(c,b),(b,a)$ 上恰好各有一根, 记为 $\lambda_i(1\leq i\leq 3)$. 下面只需证明它们对应的曲面 S_{λ_i} 在 P 点处相互正交, 即: 在 P 点处这三个曲面的法向量相互正交.

曲面 S_{λ_i} 有非零法向量 $\boldsymbol{n}_i=\left(\dfrac{x}{a-\lambda_i},\dfrac{y}{b-\lambda_i},\dfrac{z}{c-\lambda_i}\right)$. 对于 $i\neq j$,

$$\langle\boldsymbol{n}_i,\boldsymbol{n}_j\rangle=\frac{x^2}{(a-\lambda_i)(a-\lambda_j)}+\frac{y^2}{(b-\lambda_i)(b-\lambda_j)}+\frac{z^2}{(c-\lambda_i)(c-\lambda_j)}$$

$$=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\left[\left(\frac{x^2}{a-\lambda_i}-\frac{x^2}{a-\lambda_i}\right)+\left(\frac{y^2}{b-\lambda_i}-\frac{y^2}{b-\lambda_j}\right)+\left(\frac{z^2}{c-\lambda_i}-\frac{z^2}{c-\lambda_j}\right)\right]=0.$$

即: $\boldsymbol{n}_i$ 两两正交. $\square$

Week 6

3.13. 在曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一点, 由方程 $P\lambda^2+2Q\lambda\mu+R\mu^2=0$ 确定两个切方向. 证明: 这两个切方向相互正交的充要条件是 $ER-2FQ+GP=0$.

证明概要 设非零向量 $(\lambda_1,\mu_1),(\lambda_2,\mu_2)$ 是方程 $P\lambda^2+2Q\lambda\mu+R\mu^2=0$ 的不平行的两个解. 则曲面 S 的切向量 $\boldsymbol{v}_1:=\lambda_1\boldsymbol{r}_u+\mu_1\boldsymbol{r}_v$ 与 $\boldsymbol{v}_2:=\lambda_2\boldsymbol{r}_u+\mu_2\boldsymbol{r}_v$ 正交等价于

$$0=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=\lambda_1\lambda_2E+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)F+\mu_1\mu_2G.$$

情形 1 : $\mu_1\mu_2=0$.

不妨设 $\mu_1=0$, 则 $\mu_2\neq 0$, 这是因为 (λ_1,μ_1) 与 (λ_2,μ_2) 不平行. 故 $P\lambda_1^2=0$. 由 $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$, 有 $\lambda_1\neq 0$, 从而, $P=0$. 因此, $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2 \iff \lambda_1(\lambda_2E+\mu_2F)=0 \iff \lambda_2E+\mu_2F=0 \iff \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}=-\dfrac{F}{E}$. 而由 $2Q\lambda_2+R\mu_2=0$, 知 $\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}=-\dfrac{R}{2Q}$. 故 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2 \iff -\dfrac{F}{E}=-\dfrac{R}{2Q} \iff ER-2FQ=0$.

情形 2: $\mu_1\mu_2\neq 0$.

由 Vieta 定理, 有 $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}=-\dfrac{2Q}{P}, \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}=\dfrac{R}{P}$. 因此, $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2 \iff \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}E+\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)F+G=0 \iff \dfrac{R}{P}E-\dfrac{2Q}{P}F+G=0 \iff ER-2FQ+GP=0.$ □

3.14. 求下列曲面的第二基本形式:

(1) 柱面: $\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u),g(u),v)$;

(2) 正螺旋面: $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,bv)$;

(3) 椭圆抛物面: $\boldsymbol{r}(u,v)=\big(a(u+v),b(u-v),u^2+v^2\big)$.

证明概要 (1) 由

$$\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v=\big(g'(u),-f'(u),0\big)$$

有

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}\big(g'(u),-f'(u),0\big)$$

而

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\big(f''(u),g''(u),0\big),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{0}$$

故

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f''(u)g'(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}},\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=0,\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=0$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(u,v)=\frac{f''(u)g'(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}\,\mathrm{d}u^2.$$

(2) 由

$$\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v=(b\sin v,-b\cos v,u)$$

有

而

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b\sin v,-b\cos v,u)$$

$\boldsymbol{r}_{uu}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(-\sin v,\cos v,0),\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0),$

故

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=0,\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}},\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=0.$$

从而, 第二基本形式

(3) 由

$$\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v=(2b(u+v),2a(u-v),-2ab),$$

有

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}}(b(u+v),a(u-v),-ab).$$

而

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,2),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0,0,2)$$

故

$$L=N=-\frac{2ab}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}},\quad M=0.$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(u,v)=-\frac{2ab}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}}\left(\mathrm{d}u^2+dv^2\right).$$

□

16 求曲面 $F(x,y,z)=0$ 的第一、二基本形式.

证明概要 设点 $P=(x,y,z)$ 在曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 上. 由 $\nabla F(x,y,z)\neq 0$, 不妨设在点 $P,F_z\neq 0$. 则在 P 的一个邻域 U 内, $F_z\neq 0$ 且 S 有显式表达 $z=f(x,y)$. 从而, 在 U 内, S 有参数表达式 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. 由于 $f_x=-\dfrac{F_x}{F_z},f_y=-\dfrac{F_y}{F_z}$, 应用习题 9/15, 则在 U 内, 曲面 S 的第一基本形式

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(x,y)&=\left(1+f_x^2\right)dx^2+2f_xf_ydxdy+\left(1+f_y^2\right)dy^2\\&=\left(1+\frac{F_x^2}{F_z^2}\right)dx^2+2\frac{F_xF_y}{F_z^2}dxdy+\left(1+\frac{F_y^2}{F_z^2}\right)dy^2\end{aligned}$$

$$f_{xx}=\frac{-F_z^2F_{xx}+2F_xF_zF_{xz}-F_x^2F_{zz}}{F_z^3}$$

$$f_{xy}=\frac{-F_z^2F_{xy}+F_yF_zF_{xz}+F_xF_zF_{yz}-F_xF_yF_{zz}}{F_z^3},$$

$$f_{yy}=\frac{-F_z^2F_{yy}+2F_yF_zF_{yz}-F_y^2F_{zz}}{F_z^3}$$

由习题 9, 曲面 S 在 U 内的第二基本形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2\right) \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(F_z)}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\left[\left(-F_z^2F_{xx}+2F_xF_zF_{xz}-F_x^2F_{zz}\right)dx^2\right. \\
&\quad +2\left(-F_z^2F_{xy}+F_yF_zF_{xz}+F_xF_zF_{yz}-F_xF_yF_{zz}\right)dxdy \\
&\quad \left.+\left(-F_z^2F_{yy}+2F_yF_zF_{yz}-F_y^2F_{zz}\right)dy^2\right]
\end{aligned}$$

□

Week 7

3.17. 证明: 在曲面的任意一点, 任何两个相互正交的切方向的法曲率之和为常数.

证明概要 设曲面 S 在其上任意一点 P 的主曲率为 k_1, k_2, 而 v_1, v_2 是 P 点处相互垂直的任意两个切向量. 由 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned}
k_n\left(v_1\right)+k_n\left(v_2\right) &= k_1 \cos^2 \theta+k_2 \sin^2 \theta+k_1 \cos^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)+k_2 \sin^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) \\
&= k_1 \cos^2 \theta+k_2 \sin^2 \theta+k_1 \cos^2 \theta+k_2 \sin^2 \theta=k_1+k_2=2 H(P),
\end{aligned}$$

是点 P 处的常数. □

3.20. 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 κ, 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 $k_i(i=1,2)$; 若沿 C, S_1 和 S_2 法向的夹角为 θ, 证明:

$$\kappa^2 \sin^2 \theta=k_1^2+k_2^2-2 k_1 k_2 \cos \theta$$

证明概要 设曲线 $C: \boldsymbol{r}(s)$ 以弧长为参数, $\boldsymbol{n}_i(s)$ 是曲面 S_i 沿曲线 C 的法向量. 由定义, 曲面 S_i 沿曲线 C 的切向量的法曲率 $k_i=k_i(s)=\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_i(s)\right\rangle$. 则

$$\begin{aligned}
& k_1^2+k_2^2-2 k_1 k_2 \cos \theta \\
= & \left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle^2+\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle^2-2\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle \cos \left(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2}\right) \\
= & \left|\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle \boldsymbol{n}_2-\left\langle\dot{\boldsymbol{t}}(s), \boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle \boldsymbol{n}_1\right|^2 \\
= & \left|\dot{\boldsymbol{t}}(s) \wedge\left(\boldsymbol{n}_2(s) \wedge \boldsymbol{n}_1(s)\right)\right|^2 \\
= & \mid \dot{\boldsymbol{t}}(s) \wedge\left(\boldsymbol{t}(s)\right|^2 \sin^2 \theta \\
= & \kappa(s)^2 \mid \boldsymbol{n}(s) \wedge\left(\boldsymbol{t}(s)\right|^2 \sin^2 \theta \\
= & \kappa(s)^2 \sin^2 \theta .
\end{aligned}$$

这里第四个等式用到了 $\boldsymbol{n}_2(s) \wedge \boldsymbol{n}_1(s)= \pm \boldsymbol{t} \sin \theta$, 这由外积的定义得到. □

3.23. 求曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)=\left(u, v, u^2+v^2\right)$ 的椭圆点、双曲点和抛物点.

证明概要 由

$$\boldsymbol{r}_u=(1,0,2 u), \quad \boldsymbol{r}_v=(0,1,2 v),$$

得

$$E=\left\langle\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u\right\rangle=1+4 u^2, \quad F=\left\langle\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v\right\rangle=4 u v, \quad G=\left\langle\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v\right\rangle=1+4 v^2 .$$

由 $\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v=(-2 u,-2 v, 1)$, 有 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4 u^2+4 v^2}}(-2 u,-2 v, 1)$. 而又

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,2), \quad \boldsymbol{r}_{uv}=\mathbf{0}, \quad \boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,2),$$

故

$$L=N=\frac{2}{\sqrt{1+4 u^2+4 v^2}}, \quad M=0, L N-M^2=\frac{4}{1+4 u^2+4 v^2}>0$$

所以, 曲面上所有点都是椭圆点, 没有双曲点和抛物点. □

3.25. 求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),4uv)$ 的 Gauss 曲率、平均曲率、主曲率及对应的主方向.

证明概要 由

$$\boldsymbol{r}_u=(a,b,4v),\quad \boldsymbol{r}_v=(a,-b,4u)$$

有

$$\begin{aligned}E&=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=a^2+b^2+16v^2,\\F&=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2-b^2+16uv,\\G&=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2+b^2+16u^2.\end{aligned}$$

又 (记 $\Delta=4\left(a^2+b^2\right)\left(u^2+v^2\right)+8\left(b^2-a^2\right)uv+a^2b^2$.)

$$\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v=(4b(u+v),4a(v-u),-2ab),\quad \boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2b(u+v),2a(v-u),-ab),$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{r}_{vv},\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0,0,4)$$

有

$$L=N=0,\quad M=-\frac{4ab}{\sqrt{\Delta}}$$

从而, 平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{ab\left(a^2-b^2+16uv\right)}{\Delta^{\frac{3}{2}}}$$

Gauss 曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{4a^2b^2}{\Delta^2}$$

从而, 主曲率

$$k=H\pm\sqrt{H^2-K}=\frac{ab\left(a^2-b^2+16uv\pm\sqrt{\left(a^2+b^2+16u^2\right)\left(a^2+b^2+16v^2\right)}\right)}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

设切向量 $\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v$ 是一个主方向, Weingarten 变换在自然基 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 之下的系数矩阵为 A, 则

$$(\lambda\quad\mu)(kI-A)=0$$

即:

$$(\lambda\mu)\begin{pmatrix}\pm\frac{ab\sqrt{\left(a^2+b^2+16u^2\right)\left(a^2+b^2+16v^2\right)}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} & \frac{ab\left(a^2+b^2+16v^2\right)}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{ab\left(a^2+b^2+16u^2\right)}{\Delta^{\frac{3}{2}}} & \pm\frac{ab\sqrt{\left(a^2+b^2+16u^2\right)\left(a^2+b^2+16v^2\right)}}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}=0.$$

于是

$$\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\lambda\pm\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\mu=0.$$

因此,

$$(\lambda\mu)=c\left(\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\mp\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\right),$$

其中 $c\in\mathbb{R}$ 为常数.

故对应的主方向

$$\boldsymbol{e}=c\left(\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\boldsymbol{r}_u\mp\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\boldsymbol{r}_v\right).$$

□

27. 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上没有抛物点, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的法向量; 曲面 $\tilde{S}:\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{n}(u,v)$ (常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

(1) 证明曲面 S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行;

(2) 可以选取 $\tilde{S}$ 的单位法向 $\tilde{\boldsymbol{n}}$, 使得 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\tilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\quad \tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

证明概要 (1) 只需证明对曲面 S 上任意点 P 及其在曲面 $\tilde{S}$ 上的对应点 $\tilde{P}$ 的切空间相同, 即: $T_PS=T_{\tilde{P}}\tilde{S}$. 由 Weigareten 方程知, $\tilde{\boldsymbol{r}}_u=\boldsymbol{r}_u+\lambda\boldsymbol{n}_u,\tilde{\boldsymbol{r}}_v=\boldsymbol{r}_v+\lambda\boldsymbol{n}_v\in T_PS$. 而两个切空间都是二维的, 故 $T_PS=T_{\tilde{P}}\tilde{S}$.

(2) 由 (1) 知, 曲面 $\tilde{S}$ 的单位法向量 $\tilde{\boldsymbol{n}}=\pm\boldsymbol{n}$.

(i): $\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}$.

设 $S,\tilde{S}$ 的 Weingarten 变换在坐标切向量下的系数矩阵分别为 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\tilde{A}$. 由

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_u\\\tilde{\boldsymbol{r}}_v\end{pmatrix}=(I_2-\lambda A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}$$

有

$$\tilde{\mathcal{W}}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_u\\\tilde{\boldsymbol{r}}_v\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_u\\\tilde{\boldsymbol{n}}_v\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_u\\\boldsymbol{n}_v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}=A\left(I_2-\lambda A\right)^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_u\\\tilde{\boldsymbol{r}}_v\end{pmatrix}.$$

即:

$$\tilde{A}=A\left(I_2-\lambda A\right)^{-1}=\frac{1}{1-2\lambda H+\lambda^2K}\begin{pmatrix}a-\lambda K&b\\c&d-\lambda K\end{pmatrix}$$

因此,

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{A}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\tilde{K}=\det\tilde{A}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$$

(ii): $\tilde{\boldsymbol{n}}=-\boldsymbol{n}$. 此时,

$$\tilde{A}=-A\left(I_2-\lambda A\right)^{-1}=-\frac{1}{1-2\lambda H+\lambda^2K}\begin{pmatrix}a-\lambda K&b\\c&d-\lambda K\end{pmatrix}$$

故

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{A}=-\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}\tilde{K}=\det\tilde{A}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},$$

综上所述, 单位法向量 $\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}$ 即为所求. □

Week 8

3.28. 曲面 S 上的一条曲线 C 称为曲率线, 如果 C 在每点的切向量都是曲面 S 在该点的一个主方向. 证明: 曲线 $C: \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ 是曲率线当且仅当沿着 $C, \dfrac{d \boldsymbol{n}(t)}{\mathrm{d} t}$ 与 $\dfrac{d \boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d} t}$ 平行.

证明概要 曲线 $C: \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ 是曲率线当且仅当

$$-\boldsymbol{n}^{\prime}(t)=-\left(\boldsymbol{n}_u(t) u^{\prime}(t)+\boldsymbol{n}_v(t) v^{\prime}(t)\right)=\mathcal{W}\left(\boldsymbol{r}^{\prime}(t)\right)=k \boldsymbol{r}^{\prime}(t),$$

对某个 $k \in \mathbb{R}$. 而这等价于 $\boldsymbol{r}^{\prime}(t) / / \boldsymbol{n}^{\prime}(t)$. □

32. 证明: 若曲面的切平面过定点, 则该曲面是锥面.

证明概要 设曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ 的切平面过定点 P_0, 其位置向量为 $\boldsymbol{p}_0$. 则

$$\boldsymbol{r}(u, v)-\boldsymbol{p}_0=\lambda(u, v) \boldsymbol{r}_u+\mu(u, v) \boldsymbol{r}_v,$$

其中 $\lambda(u, v), \mu(u, v)$ 是光滑函数. 从而,

$$\boldsymbol{r}_u=\lambda_u \boldsymbol{r}_u+\lambda \boldsymbol{r}_{u u}+\mu_u \boldsymbol{r}_v+\mu \boldsymbol{r}_{u v}, \quad \boldsymbol{r}_v=\lambda_v \boldsymbol{r}_u+\lambda \boldsymbol{r}_{u v}+\mu_v \boldsymbol{r}_v+\mu \boldsymbol{r}_{v v} .$$

将以上两式与 $\boldsymbol{n}$ 作内积, 有

$$\begin{aligned} \lambda L+\mu M & =0 \\ \lambda M+\mu N & =0 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lambda\left(L N-M^2\right)=0 \\ & \mu\left(L N-M^2\right)=0 \end{aligned}$$

由于 $\lambda(u, v), \mu(u, v)$ 只在一点同时为 0 , 故 $L N-M^2=0$. 从而, Gauss 曲率 $K=\dfrac{L N-M^2}{E G-F^2}=0$.

设 S 上的点 P 是非脐点, 则在它的一个小邻域内, S 无脐点. 由习题 12 , 对应于两个主方向量场, 在更小的邻域内, S 有正交参数, 仍记为 (u, v). (对应的参数曲线是正交曲率线) 而由 $K=0$, 此小邻域内每点都是严格抛物点 (非平点), 只沿一个方向法曲率为 0 . 故其中一族参数曲线是曲率线且是渐近线. 而沿着方向 $\boldsymbol{r}(u, v)-\boldsymbol{p}_0$, 法曲率

$$k_n\left(\boldsymbol{r}(u, v)-\boldsymbol{p}_0\right)=\frac{L \lambda^2+2 M \lambda \mu+N \mu^2}{E \lambda^2+2 F \lambda \mu+G \mu^2}=0$$

因此, 这族曲率渐近线的切方向都过同一定点 P_0, 必是一束直线.

现在设 S 上点 P 是脐点, 则它是平点. 若存在 P 的一个邻域, S 上每点都是平点. 则 S 在此邻域内是平面的一部分. 若 P 不存在这样的邻域, 则在 P 的附近, 脐点的轨迹至多是一些曲线, 不能决定曲面的形状.

综上所述, 曲面 S 上每点都在曲面上的一条直线上且所有这些直线过定点, 即: S 是锥面. □

3.36. 证明: 正螺旋面 $\boldsymbol{r}(u, v)=(u \cos v, u \sin v, b v)$ 是极小曲面.

证明概要 直接计算,有
$\boldsymbol{r}_u=(\cos v, \sin v, 0), \quad \boldsymbol{r}_v=(-u \cos v, u \sin v, b), \quad \boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b \sin v, b \cos v, u).$
故 $E=1, \quad F=0, \quad G=u^2+b^2$. 又

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\mathbf{0}, \quad \boldsymbol{r}_{uv}=(-\sin v, \cos v, 0), \quad \boldsymbol{r}_{vv}=(-u \cos v,-u \sin v, 0),$$

故

$$L=0, \quad M=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}, \quad N=0$$

从而,平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2\left(EG-F^2\right)}=0$$

即: 正螺旋面是极小曲面. □

4.1 证明下式: (1) $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}=2$

(2) $\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^\alpha}=\Gamma_{1\alpha}^1+\Gamma_{2\alpha}^2$

证明概要 回忆 $\left(g^{\alpha\beta}\right)$ 是 $\left(g_{\alpha\beta}\right)$ 的逆矩阵,即是说, $g^{\alpha i} g_{i\beta}=\delta_{\alpha\beta}, g^{i\beta} g_{\alpha i}=\delta_{\alpha\beta}$. 由于它们都是对称矩阵,有

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}=\delta_\alpha^\alpha=2.$$

(2) 左式计算为

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^\alpha}=\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^\alpha}$$

注意 $g=g_{11} g_{22}-g_{12} g_{21}$, 不区分 g_{12}, g_{21} , 求导有

$$\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} g_{22}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} g_{11}-2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} g_{12}$$

现在计算右式的 Christoffel 符号, 在上式中令 $\alpha=\gamma, \beta=\alpha$, 有

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma=\frac{1}{2} g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\gamma\xi}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\xi}\right)$$

分别代入 $\gamma=1,2$ 有

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\alpha}^1 & =\frac{1}{2} g^{1\xi}\left(\frac{\partial g_{1\xi}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^\xi}\right) \\
\Gamma_{2\alpha}^2 & =\frac{1}{2} g^{2\xi}\left(\frac{\partial g_{2\xi}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^\xi}\right)
\end{aligned}$$

求和有

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\alpha}^1+\Gamma_{2\alpha}^2= & \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}\right)+\frac{1}{2} g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right) \\
& +\frac{1}{2} g^{21}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^1}\right)+\frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{1\alpha}^1+\Gamma_{2\alpha}^2=\frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(g^{12}+g^{21}\right)\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha}\right)+\frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha}\right)$$

为了得到结果, 还需要最后一步：注意二阶情形的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

修改系数就得到结论. □

4.3. 证明: 平均曲率 $H = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} g^{\beta\alpha}$.

证明概要 回忆 Gaussi 记号, 有

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2\left(EG - F^2\right)}$$

改写成张量记号,

$$E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$$

$$L = b_{11}, M = b_{12} = b_{21}, N = b_{22}$$

依然回忆逆矩阵

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

修改系数就得到结果. □

Week 9

6. 证明: 当 (u,v) 是曲面的正交曲率线网时（见第三章习题 29）, Codazzi 方程可以简化为

$$L_v = HE_v, N_u = HG_u$$

证明概要 回忆 Codazzi 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = -b_{2\delta}\Gamma_{11}^{\delta} + b_{1\delta}\Gamma_{12}^{\delta} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = -b_{2\delta}\Gamma_{21}^{\delta} + b_{1\delta}\Gamma_{22}^{\delta} \end{cases}$$

由于我们选取的是正交曲率线网, $F = M = 0$. 也就是 $g_{12} = b_{12} = 0$. 先代入 $b_{12} = 0$, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = -b_{22}\Gamma_{11}^{2} + b_{11}\Gamma_{12}^{1} \\ -\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = -b_{22}\Gamma_{21}^{2} + b_{11}\Gamma_{22}^{1} \end{cases}$$

并回忆正交参数委下的 Christoffel 符号:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln \partial E}{\partial u^1}\right), \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial E}{\partial u^2}\right) \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right), \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln G}{\partial u^2}\right) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln E}{\partial u^2}\right), \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln G}{\partial u^1}\right) \end{aligned}$$

分别计算

$$\begin{aligned} -b_{22}\Gamma_{11}^2 + b_{11}\Gamma_{12}^1 &= N\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial E}{\partial u^2}\right) + L\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial E}{\partial u^2}\right) \\ -b_{22}\Gamma_{21}^2 + b_{11}\Gamma_{22}^1 &= -N\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right) - L\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right) \end{aligned}$$

正交参数案下的平均曲率是

$$H = \frac{LG + NE}{2EG}$$

这就得到 $L_v = HE_v, N_u = HG_u$. □

7 证明: 平均曲率为常数的曲面, 要么是全🄵点曲面, 要么它的第一、第二基本形式可以表为

$$I = \lambda(u,v)(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\,\mathrm{d}v)$$

$$II = (1+\lambda H)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u - (1-\lambda H)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$$

其中 $\lambda > 0$.

证明概要 回忆: 正则曲面非挠点附近有参数选取, 便得参数曲线构成正交的曲率线. 假设已经这样选取, 由上一题得

$$L_v = HE_v,$$

$$N_u = HG_u.$$

并且 $H=\frac{LG+NE}{2EG}=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)$ 为常数. 即

$$2H=\frac{L}{E}+\frac{N}{G}$$

我们现在要求解 E,G,L,N . 第一个方程: $L_v=HE_v$, 积分得 $L=HE+f(u)$. 第二个方程: $N_u=HG_u$, 积分得 $N=HG+g(v)$. 代入有

$$\frac{f(u)}{E}+\frac{g(v)}{G}=0$$

现在有

$$\frac{E}{G}=-\frac{f(u)}{g(v)}$$

选取参数变换, 便得 $\tilde{E}=\tilde{G}$, 即完成证明. 这里参数变换为

$$\mathrm{d}\tilde{u}=\sqrt{|f(u)|}\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}\tilde{v}=\sqrt{|g(v)|}\mathrm{d}v$$

就可以了. 在新的坐标系下, $E=G=\lambda(u,v)$, 那么 $f(u)+g(v)=0$. 取 $f(u)=1,g(v)=-1$. 这就是

$$L+N=H(E+G)=2\lambda H$$

再注意 $L-N=2$ 即可, 就解出 L,N 来. □

9 问是否有曲面, 分别以 φ 和 ψ 为第一、第二基本形式? (1) $\varphi=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v,\psi=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u-\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$

(2) $\varphi=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\cos^2u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v,\quad \psi=\cos^2u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$

证明概要 (1) 验证 Gauss 方程:

$$-1=0$$

矛盾! 不存在符合要求的曲面.

(2) 验证 Gauss 方程:

$$\cos^2u=-\sqrt{G}(\sqrt{G})_{uu}=\cos^2u$$

计算平均曲率:

$$H=\frac{1}{2}\left(\cos^2u+\frac{1}{\cos^2u}\right)$$

验证 Codazzi 方程:

$$\begin{cases}L_v=HE_v\\ N_u=HG_u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=0\\ 0=-\sin u\cos u\left(\cos^2u+\frac{1}{\cos^2u}\right)\end{cases}$$

矛盾! 不存在符合要求的曲面. □

10. 求曲面, 它的第一、第二基本形式分别为

$$I=\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+u^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$$
$$II=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+u^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v\right)$$

证明概要 与提示的假设稍有不同,假定该曲面的参数方程是 $\boldsymbol{r}=\left(u\cos v, u\sin v, \frac{u^2}{2}\right)$,那么

$$\boldsymbol{r}_u=(\cos v, \sin v, u)$$

$$\boldsymbol{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$$

这就满足第一基本型的所有条件. 再计算

$$\boldsymbol{n}=\frac{(-u\cos v, -u\sin v, 1)}{\sqrt{u^2+1}}$$

计算有

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,1)$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=(-\sin v, \cos v, u)$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=(-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

那么

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}$$

这就满足第二基本型的所有条件. □

Week 10

12 已知两个微分式

$$\varphi = E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v(E, G > 0)$$
$$\psi = \lambda(u, v)\varphi$$

(1) 当 E, G, λ 满足什么条件时, φ, ψ 可以作为曲面的第一、第二基本形式?

(2) $E = G$ 时, 求解 E, G, λ .

证明概要 (1) 验证 Gauss 方程:

$$\lambda^2 EG = -\sqrt{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$$

也就是

$$\lambda^2 \sqrt{EG} = -\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$$

计算平均曲率:

$$H = \lambda(u, v)$$

验证 Codazzi 方程:

$$L_v = \lambda E_v,$$
$$N_u = \lambda G_u.$$

已经知道 $L = \lambda E, N = \lambda G$, 代入有 $\lambda_u = \lambda_v = 0$, 换句话说, λ 是常数.

(2) 当 $E = G$ 时,

$$\lambda^2 E = -\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{E})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$$

也就是

$$\frac{2\lambda^2}{E} = -\left[\left(\frac{E_u}{E}\right)_u + \left(\frac{E_v}{E}\right)_v\right]$$

研究

$$\Delta \log \sqrt{E} = \frac{1}{2}\left((\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{E_u}{E}\right)_u + \left(\frac{E_v}{E}\right)_v\right)$$

那么,

$$2\lambda^2 = -E\Delta \log \sqrt{E}$$

求解得到所要的 $E(u, v)$. □

13 在旋转面 $\boldsymbol{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$ 上建立正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 并求相应的诸微分形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$.

证明概要 计算其第一基本形式为 $I=\left(1+f'(u)^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+u^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v$. 选择 $\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{E}}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{1+f'(u)^2}}, \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}=\frac{\boldsymbol{r}_v}{u}$, 对应的 $\omega_1=\sqrt{1+f'(u)^2}\,\mathrm{d}u, \omega_2=u\,\mathrm{d}v$ 对照着有

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+f'(u)^2} & \\ & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$$

求其外微分, 有

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}\omega_1\\ \mathrm{d}\omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\end{pmatrix}$$

注意到关系得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}\\ \mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

代入有

$$\begin{cases}0=\mathrm{d}v\wedge\omega_{21}\\ \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\sqrt{1+f'(u)^2}\,\mathrm{d}u\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

对应解得

$$\omega_{12}=\frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}\,\mathrm{d}v$$

类似地, 求得 ω_{13}, ω_{23} . 它满足

$$\begin{pmatrix}\omega_{13} & \omega_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$

这里, 系数 a,b,c 由第二基本型 $II=a\left(\omega_1\right)^2+2b\omega_1\omega_2+c\left(\omega_2\right)^2$ 确定. 本题的第二基本型是 $L\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$, 它是 $\frac{L}{E}\left(\omega_1\right)^2+2\frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\omega_1\omega_2+\frac{N}{G}\left(\omega_2\right)^2$, 于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\omega_{13} & \omega_{23}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\sqrt{E}\,\mathrm{d}u & \sqrt{G}\,\mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{L}{E} & \frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\\ \frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}} & \frac{N}{G}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{L}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u+\frac{M}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v & \frac{M}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{N}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v\end{pmatrix}\end{aligned}$$

现在代入验证就可以了. 计算有

$$L=\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}, M=0, N=\frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_{13} & \omega_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}\,\mathrm{d}u & \frac{f'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}\,\mathrm{d}v\end{pmatrix}.$$

□

15 球面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$, (1) 求球面的一组正交活动标架;
(2) 求相应的诸微分形式 $\omega_1,\omega_2,\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}$;
(3) 求球面的第二基本形式 II .

证明概要 (1) 求得

$$\boldsymbol{r}_u=(-a\sin u\cos v,-a\sin u\sin v,a\cos u)$$
$$\boldsymbol{r}_v=(-a\cos u\sin v,a\cos u\cos v,0)$$

计算得

$$E=a^2,F=0,G=a^2\cos^2 u$$

于是选取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{a}\boldsymbol{r}_u=(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u)$$
$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{a\cos u}\boldsymbol{r}_v=(-\sin v,\cos v,0)$$

求其外积为

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u)$$

这就找到了球面的一组正交活动标架.
(2) 相应的

$$\omega_1=a\,\mathrm{d}u$$
$$\omega_2=a\cos u\,\mathrm{d}v$$

那么, 求其外微分得

$$\mathrm{d}\omega_1=0$$
$$\mathrm{d}\omega_2=-a\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

注意到关系得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}\\ \mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

代入有

$$\begin{cases}0=a\cos u\,\mathrm{d}v\wedge\omega_{21}\\ -a\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}u\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases}0=\mathrm{d}v\wedge\omega_{21}\\ -\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

解得

$$\omega_{12}=-\sin u\,\mathrm{d}v$$

类似地, 求得 ω_{13},ω_{23} . 它满足

$$\begin{pmatrix} \omega_{13} & \omega_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

这里, 系数 a,b,c 由第二基本型 $II = a\left(\omega_1\right)^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\left(\omega_2\right)^2$ 确定. 本题的第二基本型是 $L\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$, 它是 $\frac{L}{E}\left(\omega_1\right)^2 + 2\frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\omega_1\omega_2 + \frac{N}{G}\left(\omega_2\right)^2$, 于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \omega_{13} & \omega_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{E}\,\mathrm{d}u & \sqrt{G}\,\mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \\ \frac{M}{\sqrt{E}\sqrt{G}} & \frac{N}{G} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u + \frac{M}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v & \frac{M}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{N}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

现在代入验证就可以了. 下一小问指出

$$L = a, M = 0, N = a\cos^2 u$$

代入有

$$\begin{pmatrix} \omega_{13} & \omega_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & \cos u\,\mathrm{d}v \end{pmatrix}$$

这就得到所要的结果.

(3) 对于本题, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u &= (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u) \\ \boldsymbol{r}_v &= (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)\end{aligned}$$

求导得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{uu} &= (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -a\sin u) \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0) \\ \boldsymbol{r}_{vv} &= (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)\end{aligned}$$

回忆法向量的坐标

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n} = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

依次做内积有

$$L = a, M = 0, N = a\cos^2 u$$

于是知道其第二基本型为

$$II = a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + a\cos^2 u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$$

□

Week 11

16 利用正交标架法证明第三章习题 27 .

17 利用正交标架法证明第三章习题 32.

20 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 是曲面的正交标架, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是曲面的主方向, k_1, k_2 是相应的主曲率. 证明: 这时曲面的 Codazzi 方程等价于

$$\mathrm{d}k_1 \wedge \omega_1 = (k_2 - k_1)\,\omega_{12} \wedge \omega_2$$
$$\mathrm{d}k_2 \wedge \omega_2 = (k_1 - k_2)\,\omega_{21} \wedge \omega_1$$

证明概要 此时我们选取的参数是正交曲率线网, 两个基本形式形如

$$I = E\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}u + G\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}v$$
$$II = \kappa_1 E\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}u + \kappa_2 G\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}v$$

这里 κ_1, κ_2 是曲面的主曲率. 理解这一点之后再应用曲面的 Codazzi 方程. 上一题我们验证了正交参数下的 Codazzi 方程其实就是

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ \mathrm{d}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{cases}$$

剩下的就是简单的计算工作. □

Week 12

5.6. 设曲面 $S:\boldsymbol{r}\left(u^1,u^2\right)$ 的一个正交标架为

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}},\boldsymbol{e}_2=\frac{-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG-F^2}}$$

求 $\omega_1,\omega_2,\omega_{12}$ 与 $\left\{\mathrm{d}u^\alpha,\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\right\}$ 的关系.

证明概要 注意 $\omega_1=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1\rangle$, 而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2$, 那么

$$\omega_1=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}}\right\rangle=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u^1+\frac{F}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u^2$$

类似地, 由 $\omega_2=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2\rangle$ 得

$$\omega_2=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,\frac{-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG-F^2}}\right\rangle$$

于是

$$\begin{aligned}\omega_2&=\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,\frac{-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG-F^2}}\right\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}}\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,-F\boldsymbol{r}_1+E\boldsymbol{r}_2\right\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}}\left(-F^2+EG\right)\mathrm{d}u^2=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u^2\end{aligned}$$

考虑到下面的

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}\\\mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}\end{cases}$$

并注意 $\omega_{12}+\omega_{21}=0$, 计算

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1&=\frac{\partial_2E}{2\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u^2\wedge\mathrm{d}u^1+\left(\partial_1\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2\\\mathrm{d}\omega_2&=\partial_1\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2\end{aligned}$$

据此可以反解出 ω_{12} , 可以化成 Christoffel 符号的形式, 结果较繁, 此处从略. □

8 求沿着球面的赤道, 切向量的平行移动.

证明概要 在球面 $\boldsymbol{r}=(a\cos u\cos v,a\cos u\sin v,a\sin u)$ 上,

$$r_u=(-a\sin u\cos v,-a\sin u\sin v,a\cos u),r_v=(-a\cos u\sin v,a\cos u\cos v,0)$$

赤道对应 $u=0$ 的曲线, 此时 $\boldsymbol{r}(0,v)=(a\cos v,a\sin v,0)$. 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是曲面 S 上沿该曲线 $C:u^1=0,u^2=t$ 定义的可微切向量场, 希望平行移动, 则

$$\frac{DX(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

取其分量来看,则是希望

$$\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}X^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0$$

这里 $\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}=1$, 代入有

$$\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\alpha_{\beta 2}X^\beta=0$$

此处需要求 Christoffel 记号,先要求

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2 u\end{pmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\left(g^{ij}\right)=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^{-2} u\end{pmatrix}$$

将 (g_{ij}) 对 u,v 分别求导,后者是 0 矩阵,前者是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^2\sin 2u\end{pmatrix}$. 现在写出

$$\Gamma^\alpha_{\beta 2}=\frac{1}{2}g^{\alpha\xi}\left(\frac{\partial g_{\beta\xi}}{gu^2}+\frac{\partial g_{2\xi}}{gu^\beta}-\frac{\partial g_{2\beta}}{gu^\xi}\right)$$

具体计算几个: $\beta=1$ 时

$$\Gamma^\alpha_{12}=\frac{1}{2}g^{\alpha 2}\left(\frac{\partial g_{22}}{gu^1}\right)=-g^{\alpha 2}a^2\cos u\sin u$$

所以 $\Gamma^1_{12}=0,\Gamma^2_{12}=-\tan u.\beta=2$ 时,

$$\Gamma^\alpha_{22}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\xi}\left(\frac{\partial g_{22}}{gu^\xi}\right)=-\frac{1}{2}g^{\alpha 1}\left(\frac{\partial g_{22}}{gu^1}\right)=g^{\alpha 1}a^2\cos u\sin u$$

所以 $\Gamma^2_{22}=0,\Gamma^1_{22}=\cos u\sin u$. 据此展开方程得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X^1}{\mathrm{d}t}+\Gamma^1_{12}X^1+\Gamma^1_{22}X^2=0\\ \frac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}t}+\Gamma^2_{12}X^1+\Gamma^2_{22}X^2=0\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X^1}{\mathrm{d}t}+\cos u\sin uX^2=0\\ \frac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}t}-\tan uX^1=0\end{aligned}$$

给初始值 X_0^α , 它的解就是平行移动产生的切向量场. 整理成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X=\begin{bmatrix} & -\cos u\sin u \\ \tan u & \end{bmatrix}X$$

解上面的一阶线性齐次 ODE , 通过计算 e^{tA} , 可以得到唯一解 $X(t)$. 解法从略. $\square$

9 设曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(u^1,u^2\right)$, 证明: 切向量场 $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}}$ 沿曲线 $C:\left(u^1(t),u^2(t)\right)$ 是平行的充要条件是, 沿着 C 有 $\Gamma_{1\alpha}^2\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}=0$.

证明概要 切向量场 $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}}$ 沿曲线 $C:\left(u^1(t),u^2(t)\right)$ 是平行的, 则 $\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$, 即

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0$$

注意到 $v^2=0$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{1\gamma}^\alpha v^1\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0$$

写成两个式子, 就是

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{1\gamma}^1 v^1\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0\\ \Gamma_{1\gamma}^2 v^1\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0\end{gathered}$$

画框处即为我们所要的式子. 下面研究 $\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{1\gamma}^1 v^1\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0, v^1=\frac{1}{\sqrt{E}}$, 有

$$-\frac{1}{2E^{3/2}}\frac{\partial E}{\partial u^\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{1\gamma}^1\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0$$

回忆 $E=r_1\cdot r_1$, 那么 $\frac{\partial E}{\partial u^\gamma}=2\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u^\gamma}=2E\Gamma_{1\gamma}^1$. 所以上式是恒成立的, 这就证明了所要的结果. $\square$

Week 13

10 在球面 $\boldsymbol{r}=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ 上.（1）证明: 曲线的测地曲率可以表为 $k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\sin u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$, 其中 s 是曲线 $(u(s),v(s))$ 的弧长参数, θ 是曲线与经线 (u 线) 的夹角.

(2) 求球面纬圆的测地曲率.

证明概要 (1) 球面上的参数 u,v 已经是正交参数, $E=a^2, G=a^2\cos^2 u$. 利用 Liouville 公式得

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{a}\frac{\partial\log(\cos u)}{\partial u}\sin\theta=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{a}\frac{\sin u}{\cos u}\sin\theta$$

怎么求曲线与经线的夹角 θ ? 先算曲线切向量为

$$\boldsymbol{r}'(u(s),v(s))=\boldsymbol{r}_u u'(s)+\boldsymbol{r}_v v'(s)$$

$\langle\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2\cos^2 uv'(s)=a\cos u\sin\theta$, 于是 $\sin\theta=a\cos uv'(s)$, 此即为所求.

(2) 纬圆可以表示为曲线 $C:\left(u_0,\frac{1}{a\cos u_0}s\right)$, $\theta=90^\circ$, 代入上一问有 $k_g=-\frac{1}{a}\tan u_0$. □

11 求旋转面上纬线的测地曲率.

证明概要 考虑旋转面方程 $\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, 纬线是曲线 $C:\left(u_0,\frac{s}{f(u_0)}\right)$, 其选取已经是正交参数系, 第一基本型有 $I=\left(f'^2(u)+g'^2(u)\right)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}u+f^2(u)\mathrm{d}v\ \mathrm{d}v$, 利用 Liouville 公式得

$$\kappa_g=\frac{1}{\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}}\frac{\partial\log f(u)}{\partial u}\bigg|_{u=u_0}=\frac{f'(u_0)}{f(u_0)\sqrt{f'^2(u_0)+g'^2(u_0)}}$$

□

13 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 的曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位法向量场, $\boldsymbol{r}(t)$ 是曲面 S 上的正则曲线. 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(t)$ 是沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 曲面的单位切向量场, θ 是 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的夹角, 证明:

$$\left\langle\frac{\mathrm{Dw}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w}\right\rangle-\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}\right\rangle=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

证明概要 注意左式仅与 θ 有关, 不妨设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1$, 那么 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{w}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$, 计算

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}\right)^\top=k_g\boldsymbol{e}_2$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t}\right)^\top=-k_g\boldsymbol{e}_1$$

代入有

$$\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}\right\rangle=\langle k_g\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2\rangle=k_g$$

再计算

$$\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_3\wedge(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)=\cos\theta\boldsymbol{e}_2-\sin\theta\boldsymbol{e}_1$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\right)^\top=-\sin\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+\cos\theta k_g\boldsymbol{e}_2+\cos\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2-\sin\theta k_g\boldsymbol{e}_1$$

作内积得到

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} \right\rangle = \big\langle -\sin\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2 - \cos\theta k_g \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta k_g \boldsymbol{e}_2, \cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_1 \big\rangle$$

计算上式, 得

$$\begin{aligned}&\big\langle -\sin\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2 - \cos\theta k_g \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta k_g \boldsymbol{e}_2, \cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_1 \big\rangle \\ &= \cos\theta\left(\cos\theta k_g + \cos\theta\dot{\theta}\right) - \sin\theta\left(-\sin\theta\dot{\theta} - \sin\theta k_g\right) = k_g + \dot{\theta}\end{aligned}$$

作差即得所求. □

14 设曲线 C 是旋转面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ 上的一条测地线, θ 是曲线 C 与经线的夹角. 证明: 沿 C 有 $f(u)\sin\theta = $ 常数.

证明概要 考虑旋转面方程 $\boldsymbol{r}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, 其选取已经是正交参数系, 第一基本型有 $I = \left(f'^2(u) + g'^2(u)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + f^2(u)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$, 那么利用 Liouville 公式

$$0 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{f'(u)\sin\theta}{f(u)\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}}$$

测地线还满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta$$

代入本题条件得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}}\cos\theta, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{f(u)}\sin\theta$$

如何利用这三式求解? 替换得

$$0 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{f'(u)\tan\theta}{f(u)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

整理得

$$0 = \frac{1}{\tan\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u \Rightarrow 0 = \mathrm{d}\ln(f\sin\theta)$$

也就是 $f\sin\theta = $ 常数. □

15 求旋转面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$ 的测地线.

证明概要 据上题写出测地线方程为

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\sin\theta}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}\cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{u}\sin\theta\end{aligned}$$

类似地消去参数 s, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{\sqrt{1 + f'^2(u)}}{u}\tan\theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} &= -\frac{1}{u}\tan\theta\end{aligned}$$

积分第二式得 $u\sin\theta = c$ （这正是上题），因此 $\tan\theta = \frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}}$，代入第一式有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\sqrt{1+f'^2(u)}}{u}\frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}}$$

解得

$$v - v_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{1+f'^2(u)}}{u}\frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}}\,\mathrm{d}u$$

这就得到我们所要的方程. $\square$

Week 14

16 设曲面的第一基本形式为 $I=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+G(u,v)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$, 且 $G(0,v)=1, G_u(0,v)=0$ 证明: $G(u,v)=1-u^2K(0,v)+o\left(u^2\right)$.

证明概要 在正交坐标系下, 回忆 Gauss 曲率的内蕴表达式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\partial_v\left(\frac{\partial_v\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)+\partial_u\left(\frac{\partial_u\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)\right]$$

此处 $E=1, G=G(u,v)$, 得 $K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_u^2\sqrt{G}$.

令 $u=0$, 得

$$\begin{aligned}K(0,v)&=-\,\partial_u\left(\partial_u\sqrt{G}\right)\Big|_{u=0}=-\,\partial_u\left(\frac{\partial_uG}{2\sqrt{G}}\right)\Big|_{u=0}\\&=-\left.\frac{\left(\partial_u^2G\right)\left(2\sqrt{G}\right)-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\partial_uG\right)}{4G}\right|_{u=0}=-\frac{\partial_u^2G}{2}\end{aligned}$$

把 $G(u,v)$ 看成关于 u 的函数, 在 $u=0$ 处作 Maclaurin 展开, 即

$$G(u,v)=G(0,v)+G_u(0,v)u+\frac{1}{2}G_{uu}(0,v)u^2+o\left(u^2\right)$$

代入上面的结果即为所求, 并注意 $G_u(0,v)=0$. □

17 试在测地平行坐标系下求常 Gauss 曲率曲面的第一基本形式.

证明概要 假定曲面 S 的 Gauss 曲率 K 是常数, 在曲面 S 上取测地平行坐标系 (u,v) , 它的第一基本形式成为

$$I=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+G(u,v)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$$

其中 $G(u,v)$ 满足条件 $G(0,v)=1, G_u(0,v)=0$. 据 Gauss 曲率的内蕴表达式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\partial_v\left(\frac{\partial_v\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)+\partial_u\left(\frac{\partial_u\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)\right]$$

代入有

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}$$

因此, 解关于 $\sqrt{G}$ 的常系数二阶线性齐次方程 $(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0$, 并注意初始条件, 解得

$$\sqrt{G}=\begin{cases}\cos(\sqrt{K}u) & \text{if } K>0\\ 1 & \text{if } K=0\\ \cosh(\sqrt{-K}u) & \text{if } K<0\end{cases}$$

据此解得

$$I=\begin{cases}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\cos^2(\sqrt{K}u)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v & \text{if } K>0\\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v & \text{if } K=0\\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\cosh^2(\sqrt{-K}u)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v & \text{if } K<0\end{cases}$$

这就是要求的. □

18 设曲面 S 以点 P 为中心、r 为半径的测地圆的周长为 $L(r)$, 所围区域的面积为 $A(r)$.

证明概要 P 点的 Gauss 曲率

$$K(P)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L(r)}{r^3}=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi^2 r-A(r)}{r^4}$$

在 P 点附近引入测地极坐标系, $I=\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s+G(s,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta$, 满足 $\lim_{s\to 0}\sqrt{G(s,\theta)}=0$, $\lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{G(s,\theta)}=1$. 模仿上题得到

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{ss}$$

易见 $s\to 0$ 时, $\sqrt{G}\to 0$, 写出

$$(\sqrt{G})_{ss}=-\sqrt{G}K$$

两边对 s 求导有

$$(\sqrt{G})_{sss}=-(\sqrt{G})_s K-\sqrt{G}K_s$$

易见 $s\to 0$ 时, $(\sqrt{G})_{sss}\to -K(P)$. 以 s 为半径的测地圆周长 $L(s)$ 为

$$L(s)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(s,\theta)}\mathrm{d}\theta$$

现在已经知道 $\sqrt{G}(s,\theta)=s-\frac{s^3}{6}K(P)+o\left(s^3\right)$, 代入有

$$L(s)=\int_0^{2\pi}\left[s-\frac{s^3}{6}K(P)+o\left(s^3\right)\right]\mathrm{d}\theta=2\pi s-\frac{\pi s^3}{3}K(P)+2\pi o\left(s^3\right)$$

整理成极限形式即得所求.

以 s 为半径的测地圆面积 $A(s)$ 为

$$A(s)=\int_0^s\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

仿照上式可得. □

19 证明: 在常 Gauss 曲率曲面上, 测地圆具有常测地曲率.

证明概要 在测地极坐标系下, Liouville 公式指出

$$\kappa_g=\left.\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial s}\right|_{s=s_0}$$

根据 $\sqrt{G}$ 三种可能的形式, 这个式子与 θ 无关. □

20 证明: 若曲面上有两族测地线相互交定角, 则曲面是可展曲面.

证明概要

根据提示, 在曲面 S 上取正交参数系 (u,v) , 使得 u - 曲线都是测地线, 曲面的第一基本形式为 $I=E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$.

由于 $u-$ 曲线是测地线, 它的测地曲率为 0, 由 Liouville 公式知

$$-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial v}=0$$

即 $E_v=0$. 在任意取定的一点 p 考虑另一族中经过点 p 的测地线, 由 Liouville 公式知

$$0=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial u}\sin\theta$$

即 $G_u=0$. 回忆正交参数系下 Gauss 曲率计算式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\partial_v\left(\frac{\partial_v\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)+\partial_u\left(\frac{\partial_u\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)\right]$$

知道 $K=0$, 是可展曲面. □

Week 15

21 设 $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 是一张曲面, D 是单连通区域, $\boldsymbol{r}$ 的 Gauss 曲率 $K < 0$. 证明: 从 D 内一点出发的两条测地线不会相交于 D 内另一点.

证明概要 反证法. 假设曲面中有两条测地线交于两个点, 且这两个点之间没有其他交点, Gauss-Bonnet 公式指出

$$\iint_D K \, \mathrm{d}\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{2} \alpha_i < 0$$

然而两个外角和不会超过 2π , 矛盾. □

22 设 A 是曲面 S 上的一个四边形, P_i 是顶点, α_i 是相应的内角, 证明:

$$\int_A K \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial A} k_g \, \mathrm{d}s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi$$

证明概要 只要注意到外角和内角之间的转换关系: $\alpha_i + \beta_i = \pi$, 代入 Gauss-Bonnet 公式即可. □