微分几何复习：彭家贵

Nicolas Keng

2024/1/14

目录

1 Curves

我们先重述一些 Euclid 空间和向量空间上的结论:

Def 1.1 $\mathbb{R}^3$ 上的外积 $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. 若记 $\boldsymbol{v} = (x^1, x^2, x^3), \boldsymbol{w} = (y^1, y^2, y^3)$, 则

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ 上的混合积: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

Prop 1.1 取 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$,

1. $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_3$;
2. Lagrange 恒等式: $\langle \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$;
3. 轮换对称: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$;
4. Jacobi 恒等式: $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_2 \wedge (\boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}_3 \wedge (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) = 0$.

Prop 1.2 对向量值函数 $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)$ 和数值函数 $\lambda(t)$, 则

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda \boldsymbol{a}) = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a} + \lambda \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$;
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \left\langle \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{b} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{a}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \right\rangle$;
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$;
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{c}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right)$.

Def 1.2 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量值函数 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 也称为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量场 (vector field), 函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 也称数量场. 定义:

1. 梯度 $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$;
2. 散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \langle \nabla, \boldsymbol{F} \rangle$;
3. 旋度 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, -\dfrac{\partial R}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = \nabla \wedge \boldsymbol{F}$.

Prop 1.3 关于梯度, 散度, 旋度的性质:

1. $\nabla \wedge (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$;
2. $\langle \nabla, \nabla \wedge \boldsymbol{F} \rangle = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0$;
3. $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \langle \nabla f, \boldsymbol{F} \rangle$;
4. $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f) \wedge \boldsymbol{F} + f \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$.

Remark. $\mathbb{R}^n$ 中可推广梯度和散度; 旋度依赖于 $\mathbb{R}^3$, 只能用外微分形式和外微分算子推广.

我们接下来叙述一些 Euclid 空间上的结论.

Def 1.3 在三维欧氏空间 E^3 中固定原点 O, 并以 O 为起点取三个线性无关的向量 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, 于是 $\{O; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 称为 E^3 以 O 为原点的一个标架 (frame). 特殊地, 当 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 是两两正交的单位向量时, $\{O; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 称为一个正交标架.

Remark. 固定了正交标架的三维欧氏空间 E^3 等价于 $\mathbb{R}^3$, 此时不作明显区分.

Prop 1.4 取两个正交标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{O'; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$ 且满足

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{3} c^i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} t_i^j \boldsymbol{e}_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

记矩阵 $T = \left(t_i^j\right)_{3\times 3}$. 设 $P \in E^3$, 坐标分别为 $\{\boldsymbol{e}_i\} : \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $\{\boldsymbol{e}_i'\} : \left(y^1, y^2, y^3\right)$, 于是

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}, \quad x^j = c^j + \sum_{i=1}^{3} t_i^j y^i, \ (j = 1, 2, 3).$$

Def 1.4 称保持空间中任两点距离的变换 $\mathcal{T}$, 即 $\forall P, Q$, $d(P, Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q))$, 则称 $\mathcal{T}$ 为 E^3 中的合同变换.

Thm 1.1 $\mathcal{T}$ 是合同变换的充要条件是 $\exists T \in O(3)$ 及 $P \in E^3$, 使得

$$\forall X = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in E^3, \, \mathcal{T}(X) = XT + P.$$

Remark. 合同变换的意义是平移, 旋转, 反射的复合. 更一般地, 上述 $\det T$ 的正 (负) 反映了反射出现的次数偶 (奇).

当 $\det T = 1$ 时称合同变换是正向的, 或称作刚体运动; $\det T = -1$ 时称作反向刚体运动.

Thm 1.2 E^3 上的所有合同变换组成三维欧氏变换群 $\mathcal{E}$, 它能与 E^3 的全体标架一一对应.

1.1 Regular Curve on E^3

Def 1.5 定义参数曲线 (curve) $\boldsymbol{r}(t) : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_i(t))_{i=1}^n$. 若其每个分量均 C^∞ 且 $\forall t \in I$, $|\boldsymbol{r}'| > 0$, 则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 为正则 (regular) 曲线. 称 $\boldsymbol{r}'(t)$ 为切向量 (tangent vector).

Def 1.6 正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in I$, 在区间 $[c, d] \subset I$ 内的弧长定义为 $\displaystyle\int_c^d \left|\boldsymbol{r}'(t)\right| \mathrm{d}t$.

固定 c, 称 $[c, t]$ 内的弧长 s 为弧长参数, 记为 $s = s(t) = \displaystyle\int_c^t \left|\boldsymbol{r}'(u)\right| \mathrm{d}u$, 这时定义 $\boldsymbol{r}$ 关于 s 的表示 $\boldsymbol{r}(s)$. 我们默认采取 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 表示对于 s 的导数.

Cor $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|, |\dot{\boldsymbol{r}}| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$. 记 $\boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, 于是 $\boldsymbol{t}(s)$ 便是 s 处的单位切向量.

Thm 1.3 正则曲线等价于可弧长参数化的曲线.

平面情形:

Def 1.7 与 $\boldsymbol{t}(s)$ 垂直的向量称作法向量 (normal vector), 使得 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\}$ 是右手系的单位法向量 $\boldsymbol{n}(s)$ 称作 $(x(s), y(s))$ 处的主法向量. $\{\boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ 称作曲线 $\boldsymbol{r}$ 的 Frenet 标架 (Frenet frame).

Thm 1.4 Frenet 标架下的运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa(s)\\ -\kappa(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}.$$

称 $\kappa(s)$ 为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的曲率 (curvature). $|\kappa| = |\dot{\boldsymbol{t}}|$.

Def 1.8 对正则曲线 $\boldsymbol{r}$, 有 Gauss 映射 $G: I \to S^1$, $s \mapsto \boldsymbol{n}(s)$, 这里 S^1 代表单位圆周.

Remark. $\boldsymbol{r}$ 的曲率 $\kappa(s) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$, 这里 $\mathrm{d}\theta$ 代表 $G(\boldsymbol{r})$ 上弧长微分.

Thm 1.5 , 曲率的一般表达式: 对 $\mathbb{R}^2$ 上的正则曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 有 $\kappa = \dfrac{x'y'' - x''y'}{|\boldsymbol{r}'|^3}$.

考虑 $\mathbb{R}^3$ 情形:

Def 1.9 定义 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的切空间 (tangent space) $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ 为所有以 x_0 为起点的 n 维向量所构成的空间; 定义沿 $\mathbb{R}^n$ 上的曲线 $\boldsymbol{r}$ 的向量场 (vector field) 是可微映射 $X: I \to \mathbb{R}^n, \forall t \in I, X(t) \in T_{\boldsymbol{r}(t)}\mathbb{R}^n$; 切向量场 (tangent vector field) 是沿 $\boldsymbol{r}$ 的向量场, 其中在 $\boldsymbol{r}(t)$ 处的向量由切向量 $t \mapsto \boldsymbol{r}'(t)$ 给出.

Def 1.10 定义正则曲线 $\boldsymbol{r}$ 的主法向量 $\boldsymbol{n}(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}\dot{\boldsymbol{t}}$, 副法向量 $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s)$, 这里 $\kappa(s) = |\dot{t}(s)|$. 于是沿 $\boldsymbol{r}$ 有标准正交标架 (Frenet 标架) $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$, 其定向与 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 相同. 于是定义:

1. 切线 $\boldsymbol{t}(s)$, 法 (normal) 平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$;
2. 主法线 $\boldsymbol{n}(s)$, 从切 (rectifying) 平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$;
3. 副法线 $\boldsymbol{b}(s)$, 密切 (osculating) 平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$.

Thm 1.6 Frenet 标架下的运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa(s) & 0\\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}.$$

称 $\kappa(s)$ 为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的曲率, $\tau(s)$ 为挠率 (torsion). 此时 $\tau(s) = -\left\langle \dot{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}\right\rangle = \langle \dot{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}\rangle$.

Remark. κ 刻画了 $\boldsymbol{r}$ 对密切平面的偏移程度, τ 刻画了对法平面的偏移程度, 也反映了密切平面的变化情况. 特殊地, $\kappa = 0$ 时无法定义挠率, 但可以在孤立点处用极限定义.

Prop 1.5 对正则曲线 $\boldsymbol{r}$, 若 $\kappa > 0$, 则 $\boldsymbol{r}$ 是平面曲线的充要条件是 $\tau = 0$.

Thm 1.7 一般公式: 对正则曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 有:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{(\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}'') \wedge \boldsymbol{r}'}{|(\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}'') \wedge \boldsymbol{r}'|}, \quad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}''|}; \qquad \kappa = \frac{|\boldsymbol{r}'' \wedge \boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}'|^3}, \quad \tau = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}''|^2}.$$

Def 1.11 对正则曲线 $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^n$, 则 n 维活动标架 (moving n-frame) 是 n 个可微映射 $\boldsymbol{e}_i : I \to \mathbb{R}^n$, 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 满足 $\forall t \in I$, $\boldsymbol{e}_i(t) \cdot \boldsymbol{e}_j(t) = \delta_{ij}$, 且每个 $\boldsymbol{e}_i(t)$ 都表示一个沿着 $\boldsymbol{r}$ 的向量场.

特殊地, n 维 Frenet 标架是指满足如下条件的 n 维活动标架:

$$\forall 1 \le k \le n,\ \boldsymbol{r}^{(k)}(t) \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_k(t)\}.$$

Prop 1.6 Frenet 标架的存在唯一性: 对正则曲线 $\boldsymbol{r}$, 若 $\forall t \in I$, $\boldsymbol{r}'(t), \cdots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ 均线性无关, 则 $\boldsymbol{r}$ 存在唯一的 Frenet 标架, 且满足:

1. $\forall 1 \le k \le n-1$, $\boldsymbol{r}'(t), \cdots, \boldsymbol{r}^{(k)}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_k(t)$ 定向相同;
2. $\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_n(t)$ 为正定向, 即其与标准正交基定向相同.

Thm 1.8 对正则曲线 $\boldsymbol{r}$, Frenet 标架 $\{\boldsymbol{e}_i\}$, 记 $\omega_{ij}(t) = \boldsymbol{e}_i'(t) \cdot \boldsymbol{e}_j(t)$, 则有 Frenet 运动方程组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1(t) \\ \boldsymbol{e}_2(t) \\ \boldsymbol{e}_3(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & & \cdots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 & \omega_{n-1,n} \\ 0 & & & \cdots & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1(t) \\ \boldsymbol{e}_2(t) \\ \boldsymbol{e}_3(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n(t) \end{pmatrix}$$

Def 1.12 假设同上, 定义 $\boldsymbol{r}$ 的第 i 个 $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 曲率为 $\kappa_i(t) = \dfrac{\omega_{i,i+1}}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$.

Prop 1.7 $\mathbb{R}^3$ 的刚体运动保持正则曲线的弧长, 曲率和挠率的不变性.

Thm 1.9 唯一性: 对 $\mathbb{R}^3$ 的 $s \in I$ 内正则曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(s)$, 设 $\forall s \in I$, $\kappa_1(s) = \kappa_2(s) > 0$, $\tau_1(s) = \tau_2(s)$, 则 $\mathbb{R}^3$ 的一个合同变换 $\mathcal{T}$ 把 $\boldsymbol{r}_2$ 变为 $\boldsymbol{r}_1$, 即 $\boldsymbol{r}_1 = \mathcal{T} \circ \boldsymbol{r}_2$.

Thm 1.10 存在性: 给定 I 上的 C^∞ 函数 $\kappa = \kappa(s) > 0$ 和 $\tau = \tau(s)$, 则存在 $\mathbb{R}^3$ 的正则曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, $s \in I$, 它以 s 为弧长参数, κ 和 τ 为曲率和挠率.

Prop 1.8 对 $\mathbb{R}^3$ 曲线 $\boldsymbol{r}$, 若其挠率 τ 和曲率 κ 是常数, 则

1. $\kappa = 0$ 时: $\boldsymbol{r}$ 是直线;
2. $\kappa \neq 0, \tau = 0$ 时: $\boldsymbol{r}$ 是半径为 $\dfrac{1}{|\kappa|}$ 的圆周;
3. $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ 时: $\boldsymbol{r}$ 是圆柱螺线 (helix), 且

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ (a > 0), \quad \kappa = \frac{a}{a^2+b^2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

1.2 Global Theory of Curves

Def 1.13 平面曲线 $\boldsymbol{r}(s), s \in [0, l]$ 若满足 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(l), \boldsymbol{r}^{(k)}(0) = \boldsymbol{r}^{(k)}(l)$, $(k \in \mathbb{N}_+)$, 则称其为平面闭曲线. 当闭曲线没有自交点时称为简单 (simple) 闭曲线.

闭曲线的另一个等价定义是 $\boldsymbol{r}(s)$ 是周期为 l 的映射.

Def 1.14 设 $\boldsymbol{r}(s)$, $(s \in [0, l])$ 是平面闭曲线, $\kappa(s)$ 是其曲率, 则定义

$$i = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \kappa(s)\,\mathrm{d}s$$

为该曲线的环绕数 (linking number).

Thm 1.11 环绕数定理: 平面 E^2 上的简单闭曲线环绕数为 ± 1.

Lemma. Wirtinger 不等式: 设 f 是周期为 2π 的连续函数. 若 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, 则

$$\int_0^{2\pi} ([f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{2\pi} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t,$$

等号成立当且仅当 $f(t) = a\cos t + b\sin t$, 即其为波动函数.

Thm 1.12 设平面简单闭曲线 C 的长度为 L, C 界定的区域的面积为 A, 则 $L^2 - 4\pi A \geq 0$ 且等号成立当且仅当 C 是一个圆.

Prop 1.9 圆的几何性质:

1. 均匀性: 圆的曲率为常数, 且曲率为非零常数的曲线是圆;
2. 对称性: 圆以任意方向的直径为对称轴, 且任意方向均是对称方向的平面简单闭曲线是圆.

Def 1.15 平面简单闭曲线的曲率 $\kappa > 0$ 时称为凸曲线 (convex curve).

Thm 1.13 凸曲线的 Gauss 映射是一一对应.

Prop 1.10 记曲线的单位切向量 $\boldsymbol{t}$ 与 x 轴的方向角为 $\tilde{\theta}$, 则存在连续函数 $\theta : [0, l] \to \mathbb{R}$, 使得 $\tilde{\theta} \equiv \theta(s) \pmod{2\pi}$ 且 θ 在 $\pmod{2\pi}$ 意义下唯一. 凸曲线中的 θ 称作角参数.

Def 1.16 曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的支撑函数 (support function) 定义为 $\varphi(s) = -\langle \boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle$, 它表示坐标原点

到曲线过 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的切线的 (有向) 距离.

经过计算, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = -\left\langle \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{r}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\theta} \right\rangle = \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{t} \rangle$; $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\theta^2} = \dfrac{1}{\kappa} - \varphi, \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\theta^2} + \varphi = \dfrac{1}{\kappa}$. 于是有:

$$\boldsymbol{r} = \varphi' \boldsymbol{t} - \varphi \boldsymbol{n}, \quad \begin{cases} x = \varphi' \cos\theta + \varphi \sin\theta \\ y = \varphi' \sin\theta - \varphi \cos\theta \end{cases}$$

一维 Minkowski 问题: 曲率函数是正的周期函数的曲线 C 是不是凸曲线? 其回答为

Thm 1.14 设 $\kappa : S^1 \to \mathbb{R}$ 为正值连续函数, 满足条件

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi}{\kappa} \mathrm{d}\psi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\psi}{\kappa} \mathrm{d}\psi = 0,$$

则存在平面凸曲线 C 以及曲线 C 的 Gauss 映射 $\boldsymbol{g} : C \to S^1$, 使得曲线 C 在点 $\boldsymbol{g}^{-1}(\theta)$ 的曲率为 $\kappa(\theta)$, $(\theta \in S^1)$, 且曲线 C 在相差一个平移的意义下唯一.

曲线上曲率的驻点, 即使 $\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = 0$ 的点称为曲线的顶点.

Thm 1.15 四顶点定理: 平面凸曲线 C 的曲率函数若不为常数, 则其至少有两个相对极大点和两个相对极小点, 且相对极大值严格大于相对极小值. 特别地, 平面凸曲线上至少有 4 个顶点.

Thm 1.16 四顶点定理的逆定理: 设 $\kappa : S^1 \to \mathbb{R}$ 为正值连续函数, κ 或者为常数, 或者至少有两个相对极大点和两个相对极小点, 且相对极大值严格大于相对极小值, 则存在凸曲线 C, 参数表示为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) : S^1 \to E^2$, 它在相应点的曲率为 $\kappa = \kappa(t)$.

2 Local Surfaces

2.1 Fundamental Forms

Def 2.1 若平面开集 U 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射 $\varphi(u) = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) = (x, y, z)$ 满足

1. φ 是 U 到 $\varphi(U)$ 的同胚且 $\varphi \in C^\infty$;
2. $\mathrm{d}\varphi$ 单射, 即 Jacobian 满秩, $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$ 线性无关,

则称 $\boldsymbol{r}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 正则局部曲面 (surface patch), (u, v) 称为曲面的 (坐标) 参数, $\boldsymbol{r}$ 称作局部参数化.

对 $S \subset \mathbb{R}^3$ 和平面开集 U, 若 $\forall p \in S$, 有 p 在 $\mathbb{R}^3$ 中的邻域 W 定义 $\varphi : U \to W \cap S$ 满足上述两条性质, 则称 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一张正则嵌入曲面.

Prop 2.1 若光滑函数 $F(x, y, z)$ 在 P 处有 $F(P) = 0, \nabla F(P) \neq 0$, 则 F 在 P 附近确定了一张正则参数曲面.

Prop 2.2 考虑曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$: $D \to E^3$ 上两个局部参数化及参数变换 $\sigma : (u_1, v_1) \in D_1 \to (u, v) \in D$, 其给出曲面 $\boldsymbol{r}$ 的新参数表示

$$\boldsymbol{r}(u_1, v_1) = \boldsymbol{r} \circ \sigma(u_1, v_1) = \boldsymbol{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1)) : \quad D_1 \to E^3.$$

若此时曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 与曲面 $\boldsymbol{r}_1(u_1, v_1)$ 相同, 则称 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 是同一个曲面的两个不同参数表示.

这里, 参数变换保持曲面的正则性, 即 $\sigma : D_1 \to D$ 是双射且 Jacobian

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial u(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

特殊地, 若参数变换的 Jacobian 值为正, 则称其为同向参数变换; 若为负, 则称其为反向参数变换. 若一个变量与参数变换的选取无关, 则称其为几何量.

Eg 2.1 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的一种参数表示是:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \boldsymbol{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right), (x, y) \in D = \left\{x^2 + y^2 < a^2\right\},$$

它仅表示了上半球面; 另一种常见的参数表示是球坐标表示:

$$D_1 = \left\{(u, v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi\right\}, \quad \begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \cos u \sin v \\ z = a \sin u \end{cases}$$

此时 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 表示的是球面去掉南北两个极点以及连接这两个极点的一条大圆弧, 而 $D \to D_1$ 的变换

$$(x,y) \to (u,v) = \left(\arcsin \frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a}, \arctan \frac{y}{x}\right)$$

是球面上的共同部分在两个不同参数间的参数变换.

球极投影坐标: 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上除北极以外的任意一点 (x,y,z) 与北极 $N=(0,0,a)$ 的连线, 与 xy 平面交于惟一一点, 因此映射

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(2\frac{a^2u}{a^2+u^2+v^2}, 2\frac{a^2v}{a^2+u^2+v^2}, a\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2}\right)$$

给出了球面 (去掉北极点) 的一个参数表示, 称为球面的球极投影参数表示.

Eg 2.2 旋转面: xz 平面上与 z 轴无交的参数曲线 $x=f(u)$, $z=g(u)$ 绕 z 轴旋转得到曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Def 2.2 定义曲面 $S=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 P_0 点的切平面 (tangent space) 为 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{r}_u(P), \boldsymbol{r}_v(P)\}$, 记为 T_PS; 过 P_0 点与切平面 $T_{P_0}S$ 垂直的直线称为曲面在该点的法线.

曲面在某点的梯度即为该点的法向量, 一般采用单位法向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|}$.

显然 $\{P; \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v\}$ 构成了 E^3 的一个自然定向的标架.

Thm 2.1 对于曲面上任意一点 P, T_PS 等于曲面上过 P 点的曲线在 P 点的切向量的全体.

Prop 2.3 曲面的切平面和法线与参数选取无关.

E^3 的曲面 S 的任何一个切向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{r}_u + \mu\boldsymbol{r}_v$, 其长度平方为

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix},$$

$$E = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u\rangle,\ F = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v\rangle,\ G = \langle \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v\rangle,$$

这里 $\sqrt{E}$ 是切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 的长度, $\sqrt{G}$ 是切向量 $\boldsymbol{r}_v$ 的长度, $\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$ 是 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 夹角的余弦.

Def 2.3 曲面 S 的第一基本形 (1st fundamental form) 是指关于参数表示 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的二次微分式

$$\mathrm{I}(u,v) = \mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}u + 2F\,\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v\cdot\mathrm{d}v = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle,$$

这里 s 是曲面 S 上参数曲线 $\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$ 的弧长参数, 也即参数 (u,v) 下切向量长度.

曲面的第一基本形是参数 (u,v) 下切向量长度平方的微分, 用于刻画曲面上的距离.

Remark. 这里, 记向量值函数 $\boldsymbol{r}$ 的一阶微分为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x(u,v),\mathrm{d}y(u,v),\mathrm{d}z(u,v))=\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix};$$

面积微元

$$\mathrm{d}A=|\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Thm 2.2 第一基本形是几何量, 即与参数选取无关.

Proof. 对参数变换 $\sigma:\tilde{D}\to D$, $\tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{u},\tilde{v})=\boldsymbol{r}\circ\sigma=\boldsymbol{r}(u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v}))$, 由一阶微分形式不变,

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{u}} & \tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{u}\\ \mathrm{d}\tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{\tilde{u}} & u_{\tilde{v}}\\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{u}\\ \mathrm{d}\tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

则

$$\mathrm{I}(\tilde{u},\tilde{v})=\langle\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}},\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}\rangle=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle=\mathrm{I}(u,v).$$

□

Thm 2.3 曲面的第一基本形在 E^3 的合同变换下不变.

Proof. 设合同变换 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}T+P$, 则 $\langle\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}},\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}\rangle=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r}T,\mathrm{d}\boldsymbol{r}T\rangle=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle$. □

Eg 2.3 球面的第一基本形:

在球坐标参数下, 半径为 a 的球面有表示

$$r(\theta,\varphi)=(a\cos\theta\cos\varphi,a\cos\theta\sin\varphi,a\sin\theta),$$

第一基本形为

$$\mathrm{I}(\theta,\varphi)=a^2\left(\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right);$$

在球极投影参数下, 球面的第一基本形为

$$\mathrm{I}(u,v)=\frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^2}(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v)=\frac{4}{\left(1+\frac{1}{a^2}(u^2+v^2)\right)^2}(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v).$$

类似地,

Def 2.4 对曲面 S 的参数表示 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 与单位法向量 $\boldsymbol{n}$, 其第二 (second) 基本形定义为

$$\mathrm{II}=-\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{n}\rangle=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=L\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v,$$

$L=\langle \boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{n}_u\rangle$, $M=\langle \boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{n}_v\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}_u\rangle$, $N=\langle \boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}_v\rangle$.

第二基本形反映了曲面的形状 (弯曲模式).

Eg 2.4 柱面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u),y(u),v)$ 的第二基本形是 $\mathrm{II}=-\kappa\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u$, 其中 $(x(u),y(u))$ 为平面曲线, u 是它的弧长参数, κ 是 $(x(u),y(u))$ 的曲率, 即 $\kappa=-x_{uu}y_u+x_uy_{uu}$.

将 $\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 与 $\boldsymbol{n}(u_0,v_0)$ 做内积得到法方向的分量

$$\boldsymbol{h}(u,v)=\langle \boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0),\boldsymbol{n}(u_0,v_0)\rangle$$

称为高度函数, 刻画了点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 相对于 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 处切平面的高度.

Def 2.5 在参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 下 II 是关于 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 的二次型, 则

1. $LN-M^2>0$, 这时 II 是正定或负定的, 曲面是凸或者凹的 (取决于法向的选取), 满足该条件的点称作椭圆点;
2. $LN-M^2<0$, 这时 II 是不定的, 曲面是马鞍形的, 满足该条件的点称作双曲点;
3. $LN-M^2=0$, 这时 II 是退化的, 该点称作抛物点. 特殊地, 若 $L=M=N=0$, 则满足该条件的点称作平点.

将 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 处 Taylor 展开, 有

$$\boldsymbol{h}(u,v)=\frac{1}{2}\left(L\Delta u^2+2M\Delta u\Delta v+N\Delta v^2\right)+o\left(\Delta u^2+\Delta v^2\right),$$

这说明曲面的第二基本形完全刻画了曲面的弯曲.

Thm 2.4 曲面在一点的第二基本形在同向参数变换下不变, 在反向参数变换下变为其负.

Thm 2.5 第二基本形在刚体运动下不变，在反向刚体运动下变为其负.

Prop 2.4 曲面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)$ 是平面 $\iff$ 其第二基本形 $\mathrm{II}=0$ $\iff$ 法向量 $\boldsymbol{n}$ 是常向量.

2.2 Normal Curvature and Principal Curvature

设曲面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)$, $P_0(u_0,v_0)$ 处的曲率向量 $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$ 一般不再是曲面的切向量; 于是我们将其分解为曲面的切向和法向两部分.

设 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 是曲面 S 上的弧长参数化曲线, $(u(s_0),v(s_0))=(u_0,v_0)$; 于是切向量为 $\boldsymbol{t}=\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_uu'+\boldsymbol{r}_vv'$, 曲率向量为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_uu''+\boldsymbol{r}_vv''+\boldsymbol{r}_{uu}u'^2+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'.$$

设 $a=u'(s_0), b=v'(s_0)$, 则在 (u_0,v_0) 处, 曲率向量在法向上的分量为

$$\langle \ddot{r}, n\rangle = Lu'^2+2Mu'v'+Nv'^2=a^2L+2abM+b^2N,$$

其与曲线的选取无关, 仅与曲线在该点处的单位切向量的方向有关.

Def 2.6 设曲面上某一点的切向量为 $\boldsymbol{w}=\xi\boldsymbol{r}_u+\eta\boldsymbol{r}_v\in T_PS$, 则这一点沿切向量 $\boldsymbol{w}$ 的法曲率 (normal curvature) 定义为

$$k_n(\boldsymbol{w})=\frac{\mathrm{II}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}{\mathrm{I}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}.$$

曲面沿一个方向的法曲率反映了曲面沿该方向的弯曲程度.

Thm 2.6 法曲率在同向参数变换和曲面的刚体运动下也保持不变; 但在反向参数变换或反向刚体运动下改变符号.

Eg 2.5 半径为 a 的球面上任意一点沿任何一个方向的法曲率均为 $\dfrac{1}{a}$. 这说明球面沿任何方向的弯曲是一样的.

Prop 2.5 曲面沿单位切向量 $\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v\in T_PS$ 的法曲率为 $k_n(\boldsymbol{v})=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2$, 并且 $k_n(\boldsymbol{v})=k_n(-\boldsymbol{v})$. 我们有

1. 对于曲面的椭圆点, 即 $LN-M^2>0$ 时, 则 $k_n(v)=0$ 无解, 沿 P 点任何切向的法曲率同时为正或为负. 这说明曲面在该点沿任意方向的弯曲是同向的;
2. 对于曲面的双曲点, 即 $LN-M^2<0$ 时, 则 $k_n(v)=0$ 有两个线性无关的解, 这两个方向称为该点的渐近方向. 两个渐进方向将切平面分成四个区域, 相对的区域法曲率符号相同;
3. 对于不是平点的抛物点, 则 $k_n(v)=0$ 只有一个解, 这个方向称为渐近方向. 渐进方向将切平面分成两个区域, 法曲率在两个区域均不为零且符号相同;
4. 对于平点, 法曲率 k_n 沿任何方向均为零, 即曲面局部没有弯曲, 类似于平面.

Def 2.7 曲面 S 的 Gauss 映射定义为其到单位球面 S^2 上的映射

$$\boldsymbol{g}:S\to S^2\quad \boldsymbol{r}(u,v)\mapsto\boldsymbol{n}(u,v).$$

通过 Gauss 映射的微分可以得到切平面上的线性变换:

Def 2.8 定义曲面的 Weingarten 变换为切平面之间的线性变换 $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}:T_PS\to T_PS,\quad \boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v\mapsto-\left(\lambda\boldsymbol{n}_u+\mu\boldsymbol{n}_v\right).$$

Thm 2.7 Weingarten 变换在同向参数变换和刚体运动下不变, 在反向参数变换和反向刚体运动下变为其负.

Prop 2.6 曲面 S 沿切向量 $\boldsymbol{v}$ 方向的法曲率可表为 $k_n(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$.

Thm 2.8 Weingarten 变换是曲面切平面上的自伴算子 (self adjoint), 即

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_P S,\ \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{W}(\boldsymbol{w})\rangle .$$

Weingarten 变换作为平面自伴算子有两个特征值且都是实数 (自伴算子在一组单位正交基下的变换矩阵是实对称阵). 考虑特征值 k 使得 $\langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle k\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = k$, 则 k 本质上是 $\boldsymbol{v}$ 方向的法曲率, 于是

Def 2.9 定义 Weingarten 变换在 $P \in S$ 点的两个特征值 k_1, k_2 为 S 在 P 点的主曲率 (principle curvature), 对应的两个特征向量的方向称为曲面在 P 点的主方向 (principal direction).

Remark. 曲面可以看作是由无数条相同高度的等高线组成. 在等高线上的某一点, 曲率最大的方向是与该点切线垂直的方向, 曲率最小的方向是与该点法线垂直的方向, 而法线与切线垂直; 主方向就是曲面弯曲程度最大以及最小的两个方向, 即最陡峭和最平稳的两个方向.

假设主曲率为 k，主方向为 $\boldsymbol{v}$，则 $k_n(\boldsymbol{v}) = \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle k\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = k$, 这说明主曲率就是主方向上的法曲率; 另一方面, 如果有两个不同的主曲率, 则它们对应的主方向必定正交; 否则若主曲率相同, 则任意方向都是主方向. 据此可以在曲面任意一点确定单位正交的主方向 $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\}$.

曲面 $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ 在切平面的基 $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v\}$ 下 Weingarten 变换的系数矩阵是

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & ME - LF \\ MG - NF & NE - MF \end{pmatrix},$$

即主曲率 k 须满足方程

$$k^2 - \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0.$$

一般记曲面的两个主曲率 (即上述方程的两根) 为 k_1, k_2.

Def 2.10 定义曲面 S 的平均曲率 (mean curvature) H 和 Gauss 曲率 (Gauss curvature) K 为:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} W = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \quad K = k_1 k_2 = \det W = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Cor Gauss 曲率 K 满足

$$\boldsymbol{n}_u \wedge \boldsymbol{n}_v = (ad - bc) \boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v = K \boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v,$$

这里 a, b, c, d 是上述 Weingarten 变换的系数矩阵.

Thm 2.9 主曲率和平均曲率在同向参数变换和刚体运动下不变, 在反向参数变换和反向刚体运动下变为其负; Gauss 曲率在参数变换和合同变换下不变.

Def 2.11 平均曲率 H 恒为 0 的曲面称为极小曲面 (minimal surface); 它分为平面, 悬链面 (catenoid), 螺旋面 (helicoidal surface) 三类.

Thm 2.10 Euler 公式: 设 k_1, k_2 是曲面在 P 的主曲率, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是相应的单位正交主方向. 设单位向量 $\boldsymbol{v} \in T_P S$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 θ, 则曲面在 P 点沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的法曲率为

$$k_n(\boldsymbol{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Proof. 设 $\boldsymbol{v} = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2$, 计算有

$$k_n(\boldsymbol{v}) = \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

□

Cor 于是当主曲率 k_1, k_2 不等时, 法曲率在主方向上取极大值或极小值; 当主曲率 k_1, k_2 相等时, 法曲率与切方向无关.

Lemma. 设 P 是曲面 S 上的一点, 则参数曲面 $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ 总存在一个新的同向参数表示 $\boldsymbol{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$, 使得 $\{\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}(P), \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}(P)\}$ 恰好是 P 点的单位正交主方向.

Prop 2.7 切向量 $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v$ 是 $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ 的一个主方向当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

此时主曲率 k 满足 $k(E\lambda + F\mu) = L\lambda + M\mu, \quad k(F\lambda + G\mu) = M\lambda + N\mu.$

于是不妨取参数化表示 $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ 使得 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 是 (u_0, v_0) 处的单位正交主方向, 对应的主曲率为 k_1, k_2. 于是此时第一基本形系数矩阵 $\mathrm{I} = I_2$, 第二基本形系数矩阵 $\mathrm{II} = \mathrm{diag}\{k_1, k_2\}$. 将 $\boldsymbol{r}$ 在 (u_0, v_0) 处作二阶 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{r} =& \boldsymbol{r}\left(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v\right) - \boldsymbol{r}\left(u_0, v_0\right) \\ =& \boldsymbol{r}_u \Delta u + \boldsymbol{r}_v \Delta v + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}_{uu} \Delta u \Delta u + 2\boldsymbol{r}_{uv} \Delta u \Delta v + \boldsymbol{r}_{vv} \Delta v \Delta v\right) + o(\Delta u \Delta u + \Delta v \Delta v) \\ =& \left(\Delta u\right) \boldsymbol{i} + \left(\Delta v\right) \boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\left(k_1 \Delta u \Delta u + k_2 \Delta v \Delta v\right) \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

于是向量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 在正交标架 $\{P;\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$ 下的近似坐标是

$$\left(\Delta u,\Delta v,\frac{1}{2}(k_1\Delta u\Delta u+k_2\Delta v\Delta v)\right).$$

Prop 2.8 S 在 P 点的二阶近似曲面是:

$$S^*:x=u;y=v;z=\frac{1}{2}\left(k_1u^2+k_2v^2\right).$$

其中, 对 Gauss 曲率 $K=k_1k_2$,

1. $K>0$ 时, P 是椭圆点, S^* 是椭圆抛物面;
2. $K<0$ 时, P 是双曲点, S^* 是双曲抛物面;
3. $K=0$ 时, P 是抛物点, S^* 是抛物柱面.

特殊地, 当 $k_1=k_2=k$ 时, 这样的点称作脐点 (umbilical point); 此时若 $k\neq 0$ 则称为圆点, $k=0$ 时即为平点.

直观地, 在脐点处, 曲面沿任何切方向的弯曲程度一样. 在脐点处 Gauss 曲率 $K=H^2$, 这里 H 为平均曲率; 两个主曲率相等, 任何方向均为主方向.

Eg 2.6 若曲面 S 的每一个点都是脐点, 则称其为全脐点曲面. 全脐点曲面有且仅有平面或球面, 即 S 是全脐点曲面当且仅当 S 是平面或者球面的一部分.

Prop 2.9 Gauss 曲率的几何意义: 对 S 上包含点 P 的区域 D, $\boldsymbol{g}(D)$ 是其在 Gauss 映射下的像, 则

$$\lim_{D\to P}\frac{\text{Area}(\boldsymbol{g}(D))}{\text{Area}(D)}=K(P).$$

其说明通过 Gauss 映射反映的曲面在一点的弯曲程度正好是该点的 Gauss 曲率.

Prop 2.10 对于平面正则曲线 $(f(u),g(u))$, $f>0$, u 是弧长参数, 则其给出旋转曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u)),\ v\in(0,2\pi),$$

则有

$$K=-\frac{f''}{f},\quad H=\frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f}-\frac{f''}{g'}\right),\quad k_1=-\frac{f''}{g'},\quad k_2=\frac{g'}{f}.$$

Eg 2.7 常平均曲率的旋转曲面称作 Delaunay 曲面.

Prop 2.11 旋转面如果是极小曲面则一定是悬链面.

Eg 2.8 直纹面 (ruled surface) 是指由单参数直线族构成的曲面, 它的参数表达式为 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$, 其中 $\boldsymbol{a}(u)$ 是一条空间曲线, $\boldsymbol{b}(u)$ 是随 u 变化的一个方向. 固定 u, $\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 是过 $\boldsymbol{a}(u)$ 沿方向 $\boldsymbol{b}(u)$ 的一条直线, 称为直纹面的直母线.

Gauss 曲率恒为零的直纹面称为可展曲面 (developable surface).

对直纹面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$, 下述条件等价:

1. $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是可展曲面, 即 $K=0$ 或 $M=0$;
2. $\left(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'\right)=0$;
3. 沿着直母线, 直纹面的法向量不变, 即 $\boldsymbol{n}_v=0$.

Def 2.12 设直纹面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$, 当 $\boldsymbol{a}$ 是常值向量 a_0 时, 称它为以 a_0 为顶点的锥面 (conical surface), 这时 S 的直母线均过定点; 当方向 $\boldsymbol{b}$ 与 u 无关时, 称它为柱面 (cylinder), 这时 S 的直母线均平行; 空间正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的切线全体构成空间的一张曲面, 这个曲面可以表示为 $\boldsymbol{r}(v,t)=\boldsymbol{r}(t)+v\boldsymbol{r}'(t)$, 称为切线面 (tangent surface).

锥面, 柱面, 切线面均为可展曲面. 事实上, 我们有分类:

Thm 2.11 设可展曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$, 满足 $\left(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'\right)=0$,

1. 若 $\boldsymbol{b}(u)\wedge\boldsymbol{b}'(u)\equiv 0$, 则 S 为柱面;
2. 若 $\boldsymbol{b}(u)\wedge\boldsymbol{b}'(u)\neq 0$, 即 $\boldsymbol{b}(u)$ 和 $\boldsymbol{b}'(u)$ 线性独立, 记 $\boldsymbol{a}'(u)=\lambda(u)\boldsymbol{b}(u)+\mu(u)\boldsymbol{b}'(u)$, 令 $\tilde{\boldsymbol{a}}(u)=\boldsymbol{a}(u)-\mu(u)\boldsymbol{b}(u)$, 则 $\tilde{\boldsymbol{a}}'(u)=\left(\lambda(u)-\mu'(u)\right)\boldsymbol{b}(u)$.
   (a) 若 $\tilde{\boldsymbol{a}}'(u)\equiv 0$, 则 $\tilde{\boldsymbol{a}}(u)$ 恒为 $\boldsymbol{a}_0$, S 为以 $\boldsymbol{a}_0$ 为顶点的锥面.
   (b) 若 $\tilde{\boldsymbol{a}}'(u)\neq 0$, 则 $\tilde{\boldsymbol{a}}(u)$ 是正则曲线, S 的直母线是曲线 $\tilde{\boldsymbol{a}}(u)$ 的切线, 此时 S 是切线面.

2.3 Natural Frame

这部分的中心是: 证明任给光滑函数 E,F,G,L,M,N, 形式

$$\mathrm{I}=E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v,\quad \mathrm{II}=L\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v,$$

是某个曲面的第一, 第二基本形当且仅当其满足 Gauss 方程和 Codazzi 方程, 且这个曲面在相差一个合同变换的意义下唯一.

我们先用自然标架讨论.

Def 2.13 给定曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, 若 $\forall\boldsymbol{r}(u_0,v_0)\in S$, $\boldsymbol{x}(u_0,v_0)$ 是从点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 出发的一个向量, 并且 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 光滑地依赖于参数 (u,v), 则称 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 为 S 上的光滑向量场 (smooth vector field).

若此时 $\forall(u,v)$, $\boldsymbol{x}(u,v)$ 是曲面 S 在点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的切向量时, $\boldsymbol{x}(u,v)$ 称为曲面 S 的切向量场; $\boldsymbol{x}(u,v)$ 是曲面 S 在点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的法向量时, $\boldsymbol{x}(u,v)$ 称为曲面 S 的法向量场.

向量场 $\boldsymbol{x}$ 代表: 只要给定 (u_0,v_0), 就给定了在该点处的一个向量.

Eg 2.9 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是曲面 S 上的切向量场; $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v|}$ 是曲面 $\boldsymbol{S}$ 的单位法向量场.

Def 2.14 若对曲面 S 上的处处线性无关的向量场 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$, 则以曲面上的点为原点的 E^3 的坐

标系 $\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{x}_1(u,v),\boldsymbol{x}_2(u,v),\boldsymbol{x}_3(u,v)\}$ 定义为 S 上的活动标架 (moving frame). 一般地, 我们要求正向 (右手系), 亦即混合积 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)>0$.

$\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$ 称作曲面的自然 (natural) 标架.

直观来说, S 的一个活动标架就是在 S 的每一个点给了 E^3 的一组标架.

Eg 2.10 如果 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ 为单位正交标架, 则称 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ 为曲面 S 的正交 (orthogonal) 标架.

曲面的正交标架一定存在: 由自然标架 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle}}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v-\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{e}_1\rangle\,\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{r}_v-\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{e}_1\rangle\,\boldsymbol{e}_1|}=\frac{E\boldsymbol{r}_v-F\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}},$$

有切平面的单位正交基; 再令 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v|}=\boldsymbol{n}$, 则 $\{r;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是 S 的正向正交标架.

Remark. 通过研究曲面上的任意标架来研究曲面与标架无关的几何性质, 是微分几何学的一个基本方法. 为了使 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ 能准确反映曲面的几何性质, 以后我们均设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是曲面的切向量.

Def 2.15 对 $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,2\}$, 我们作如下张量记号约定:

1. 曲面的参数化: $S:\boldsymbol{r}\left(u^1,u^2\right)$;
2. Einstein 求和约定: 如果一个单项中同一个指标作为上标, 下标同时出现, 则代表对该指标进行求和, 即 $a_ib^i=\sum\limits_{i\in I}a_ib^i$;
3. 偏导: $\boldsymbol{r}_\alpha=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}$, $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}$, $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{\partial^3\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta\partial u^\gamma}$;
4. 定义 $g_{\alpha\beta}=\langle\boldsymbol{r}_\alpha,\boldsymbol{r}_\beta\rangle$, 即 $g_{11}=E,g_{12}=F,g_{22}=G$,
5. 定义 $b_{\alpha\beta}=\langle\boldsymbol{r}_{\alpha\beta},\boldsymbol{n}\rangle=\langle\boldsymbol{r}_\alpha,-\boldsymbol{n}_\beta\rangle$, 即 $b_{11}=L,b_{12}=M,b_{22}=N$,
   (a) 第一, 二基本形: $\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta$, $\mathrm{II}=b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta$;
   (b) $(g_{\alpha\beta}),(b_{\alpha\beta})$ 对应第一, 二基本形的系数矩阵, 记 $g=\det(g_{\alpha\beta})$, $b=\det(b_{\alpha\beta})$;
   (c) $\left(g^{\alpha\beta}\right)_{2\times2}=(g_{\alpha\beta})^{-1}_{2\times2}$, $\left(b^{\alpha\beta}\right)_{2\times2}=(b_{\alpha\beta})^{-1}_{2\times2}$ 为逆矩阵, $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta$, $b_{\alpha\gamma}b^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta$.

这里 δ_α^β 是 Kronecker 符号.

显然 $g_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$ 关于下标 α,β 对称.

我们下面求自然标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$ 关于参数 $\left(u^1,u^2\right)$ 偏导数的表达式. 设

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\boldsymbol{r}_\gamma+C_{\alpha\beta}\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{n}_\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}=D_\alpha^\beta\boldsymbol{r}_\beta+D_\alpha\boldsymbol{n},$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma,C_{\alpha\beta},D_\alpha^\beta,D_\alpha$ 是待定系数.

分别作内积 $\langle \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{n} \rangle$, $\langle \boldsymbol{n}_{\alpha}, \boldsymbol{n} \rangle$, $\langle \boldsymbol{n}_{\alpha}, \boldsymbol{r}_{\gamma} \rangle$, 经过计算可得

$$C_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}, \quad D_{\alpha} = 0, \quad D_{\alpha}^{\beta} = -b_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma}.$$

记 $b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$, 于是 $D_{\alpha}^{\beta} = -b_{\alpha}^{\beta}$; 最后求系数 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$. 作内积 $\langle \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{r}_{\delta} \rangle$, 结合

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} = \langle \boldsymbol{r}_{\alpha\gamma}, \boldsymbol{r}_{\beta} \rangle + \langle \boldsymbol{r}_{\beta\gamma}, \boldsymbol{r}_{\alpha} \rangle$$

的轮换求和, 化简即得 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$. 一般地, 我们有如下定义:

Def 2.16 定义曲面 S 的 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}} \right) = g^{\gamma\xi} \left\langle \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{r}_{\xi} \right\rangle,$$

有时也将下式称为曲面的第二类 Christoffel 符号:

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = g_{\gamma\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}} \right) = \left\langle \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{r}_{\xi} \right\rangle.$$

曲面的 Christoffel 符号由曲面第一基本形的系数 (及偏导数) 完全确定. 显然 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}$.

Thm 2.12 曲面 S 自然标架 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 的运动方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}} = \boldsymbol{r}_{\alpha} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \boldsymbol{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{n} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\alpha}} = -b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \boldsymbol{r}_{\alpha} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \dfrac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left(\dfrac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} + \dfrac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} - \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}} \right) \\ b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \end{cases}$$

Remark. 系数 $\left(b_{\alpha}^{\beta} \right)$ 就是 Weingarten 变换在基 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ 下的系数矩阵.

回到原来的记号, 用 (u, v) 代替 $\left(u^1, u^2\right)$, 用 E, F, G 表示第一基本形的系数, 即

$$g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G,$$

则

$$g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2},$$

我们有如下一般及正交参数系 ($F \equiv 0$) 形式的 Christoffel 符号:

Christoffel 符号	一般系数	正交参数系
Γ_{11}^1	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(\dfrac{G}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u}+\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}-F\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln E}{\partial u}$
$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1$	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(\dfrac{G}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}-\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln E}{\partial v}$
Γ_{11}^2	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(-\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u}-\dfrac{E}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}+E\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)$	$-\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial v}$
Γ_{22}^1	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(G\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{G}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}-\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}\right)$	$-\dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}$
$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2$	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(-\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}+\dfrac{E}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}$
Γ_{22}^2	$\dfrac{1}{EG-F^2}\left(-F\dfrac{\partial F}{\partial v}+\dfrac{F}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}+\dfrac{E}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}\right)$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln G}{\partial v}$

Eg 2.11 单位球面在球极投影参数

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\frac{2v}{1+u^2+v^2},\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$$

下的 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^1=-\frac{2u}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^2=-\frac{2v}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{2v}{1+u^2+v^2},\quad \Gamma_{22}^1=\frac{2u}{1+u^2+v^2}.$$

另外, 易证此时第二基本形的系数

$$L=E,\quad M=F=0,\quad N=G,$$

所以 Weingarten 变换的系数矩阵为 $\left(b_\alpha^\beta\right)=I_2$.

我们对 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\xi}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}$ 左右关于 γ 求导, 则得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}\right) &= \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\left(\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\xi}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}\right)\\
&= \frac{\partial \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\boldsymbol{r}_{\xi}+\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\xi\gamma}+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\boldsymbol{n}+b_{\alpha\beta}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\gamma}}\\
&= \frac{\partial \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\boldsymbol{r}_{\xi}+\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\eta}_{\xi\gamma}\boldsymbol{r}_{\eta}+b_{\xi\gamma}\boldsymbol{n}\right)+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\boldsymbol{n}+b_{\alpha\beta}\left(-b^{\xi}_{\gamma}\boldsymbol{r}_{\xi}\right)\\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{\eta\gamma}-b_{\alpha\beta}b^{\xi}_{\gamma}\right)\boldsymbol{r}_{\xi}+\left(\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma}+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right)\boldsymbol{n}.
\end{aligned}
$$

由于 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta\gamma}=\boldsymbol{r}_{\alpha\gamma\beta}$, 上式中 $\boldsymbol{r}_{\xi}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的系数关于 β,γ 对称, 于是得到下列方程:

Def 2.17

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}-\dfrac{\partial}{\partial u^{\beta}}\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{\eta\gamma}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{\eta\beta}-b_{\alpha\beta}b^{\xi}_{\gamma}+b_{\alpha\gamma}b^{\xi}_{\beta}=0\\
\dfrac{\partial}{\partial u^{\gamma}}b_{\alpha\beta}-\dfrac{\partial}{\partial u^{\beta}}b_{\alpha\gamma}+\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma}-\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta}=0.
\end{cases}
$$

称为曲面的结构方程或 Gauss-Codazzi 方程, 其中上式称作 Gauss 方程, 下式称作 Codazzi 方程.

Causs-Codazzi 方程是运动方程这组一阶 PDE 的可积性条件, 由于 $\alpha,\beta,\gamma,\xi=1,2$, 所以 Gauss 方程和 Codazzi 方程是两组方程. 为简化书写, 我们引进如下 Riemann 记号:

Def 2.18 定义如下记号为 Riemann 记号:

$$
R_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{\eta\gamma}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{\eta\beta}\right).
$$

Prop 2.12 Riemann 记号的对称性: (1, 2) 反对称, (3, 4) 反对称, (12, 34) 对称, 即:

$$
R_{\delta\alpha\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\delta\alpha}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\gamma\beta}.
$$

于是, 我们可以将 Gauss-Codazzi 方程改写作如下的独立方程形式; 其中, Gauss 方程含一个独立方程, 而 Codazzi 方程含两个独立方程.

Thm 2.13 Guass 方程:

$$
R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-\left(b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}\right),
$$

由对称性可将其写作

$$
R_{1212}=-\left(b_{11}b_{22}-(b_{12})^{2}\right).
$$

Codazzi 方程在 $\beta=\gamma$ 时是平凡的, 因此不妨设 $\beta=1,\gamma=2$, 于是

Thm 2.14 Codazzi 方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^{\xi}_{12}-b_{2\xi}\Gamma^{\xi}_{11}\\ \dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^{\xi}_{22}-b_{2\xi}\Gamma^{\xi}_{21}\end{cases}$$

Gauss 方程给出了一个第二基本形的行列式 $LN-M^2$ 的 Riemann 记号表达, 从而能够给出

Thm 2.15 Gauss 绝妙定理 (Theorema Egregium): Gauss 曲率 K 由曲面的第一基本形唯一确定, 即

$$\begin{aligned}K=&\frac{R_{1212}}{g}=\frac{R_{1212}}{EG-F^2}\\=&\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right).\end{aligned}$$

这说明高斯曲率是曲面的一个内蕴量, 这便是曲面内蕴几何的起源. 它也有另一种计算方式:

Prop 2.13 Gauss 曲率的 Brioschi 公式:

$$K=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}E_{vv}+F_{uv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}}{\left(EG-F^2\right)^2}$$

Thm 2.16 唯一性: 设 $S_1:\boldsymbol{r}\left(u^1,u^2\right)$ 和 $S_2:\tilde{\boldsymbol{r}}\left(u^1,u^2\right)$ 是定义在同一个参数域 D 上的两个曲面, 若 $\forall\left(u^1,u^2\right)\in D$, S_1 和 S_2 在 $\left(u^1,u^2\right)$ 点有相同的第一基本形和第二基本形, 则 S_1 和 S_2 相差一个 E^3 的刚体运动, 即存在唯一的 E^3 上的刚体运动 $\mathcal{T}$ 使得 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}$.

Thm 2.17 存在性: 若给定单连通区域 D 上光滑函数构成的对称正定矩阵 $(g_{\alpha\beta})$ 和对称矩阵 $(b_{\alpha\beta})$, 类似定义 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, b^{\alpha}_{\beta}$, 若其确定的 Gauss-Codazzi 方程在 D 上恒成立, 则 $\forall u_0=\left(u_0^1,u_0^2\right)\in D$, 存在 u_0 的邻域 $U\subset D$ 以及定义在 U 上的曲面 $\boldsymbol{r}\left(u_1,u_2\right):U\to E^3$, 使得 φ 和 ψ 分别为该曲面的第一, 第二基本形.

2.4 Orthogonal frame

接下来我们研究曲面的正交标架的运动方程和结构方程. 一般地, 给定 E^3 的曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, 对正交标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 我们要求 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 落在切空间中, 这时 $\boldsymbol{e}_3=\pm\boldsymbol{n}$.

于是存在可逆方阵 $A=(a_{ij})$ 作为基变换矩阵, 使得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$$

Def 2.19 做如下记号约定: 记

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix} A, \quad \omega_i = \langle \mathrm{d}r, \boldsymbol{e}_i\rangle = a_{1i}\,\mathrm{d}u + a_{2i}\,\mathrm{d}v, \ (i=1,2),$$

记

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \omega_{ij} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle, \ (i,j=1,2,3).$$

于是诸 ω_i, ω_{ij} 都是一阶微分形式. 特殊地, ω_{12} 称作联络形式.

显然 $\omega_{ii}=0$, (ω_{ij}) 反对称. 我们经过运算有:

Thm 2.18 正交活动标架下的运动方程和曲面基本形: 对 E^3 的曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 及其正交标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 则

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 = \omega_{12}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = \omega_{21}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \omega_{31}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{32}\boldsymbol{e}_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathrm{I} = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2 \\ \mathrm{II} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} \end{cases}$$

曲面的第一, 第二基本形由正交标架运动方程的系数确定. 事实上, 我们还有

Prop 2.14 曲面的第一基本形不依赖于正交标架的选取; 曲面的第二基本形不依赖于同法向的正交标架选取.

Proof. 若对正交标架的 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 作旋转, 即设

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix},$$

其中 $\theta=\theta(u,v)$ 光滑. 利用正交标架的运动方程, 计算得

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\tilde{\omega}_{13} \\ \tilde{\omega}_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{13} \\ \omega_{23}\end{pmatrix}.$$

□

下面我们讨论正交活动标架与自然标架的关系. 注意到

$$\mathrm{I} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle = \begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix} AA^T \begin{pmatrix}\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v\end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix}E & F \\ F & G\end{pmatrix} = AA^T,$$

$\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ 可以与 ω_1,ω_2 互相线性表示. 注意到一阶微分形式 ω_{13} 和 ω_{23} 是 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ 的线性组合, 因此

它们也可表示为 ω_1,ω_2 的线性组合. 设

$$\begin{pmatrix}\omega_{13} & \omega_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} B, \quad B = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22}\end{pmatrix}.$$

当 $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$ 时, $\det A = \sqrt{EG - F^2}$, 第二基本形

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} B \begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix} ABA^T \begin{pmatrix}\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix} = ABA^T.$$

Prop 2.15 矩阵 B 的特征值是主曲率, 行列式是 Gauss 曲率, $\dfrac{1}{2}\operatorname{tr} B$ 是平均曲率.

Proof. Weingarten 变换在自然基下的系数矩阵为 $(ABA^T)(AA^T)^{-1} = ABA^{-1}$, 与 B 相似; 相似变换不改变矩阵的特征值, 行列式, 迹. □

事实上, 这里 B^T 是 Weingarten 变换在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的系数矩阵, $h_{\beta\alpha} = \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{e}_\alpha), \boldsymbol{e}_\beta\rangle$, $(\alpha,\beta = 1,2)$. 特别地, 由 Weingarten 变换是自伴算子立得 B 是对称矩阵. 严谨地,

Prop 2.16 B 是 Weingarten 变换在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的系数矩阵. 特别地, 若曲面无脐点且 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是主方向, 则主曲率使得 $\omega_{13} = k_1\omega_1, \omega_{23} = k_2\omega_2$.

Proof.

$$\mathcal{W}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} = A^{-1}\mathcal{W}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix} = A^{-1}ABA^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix},$$

于是 B 是系数矩阵. 这时, 代入定义与上命题,

$$\langle \mathcal{W}(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_1\rangle = k_1, \quad \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_2\rangle = \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_1\rangle = 0, \quad \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2\rangle = k_2,$$

系数矩阵 B 是对角阵 $\operatorname{diag}\{k_1, k_2\}$; 第二基本形为 $\mathrm{II} = k_1\omega_1\omega_1 + k_2\omega_2\omega_2$. □

为研究曲面上正交标架的变化规律, 微分是必要的手段, 这是因为正交标架不再直接依赖于曲面的参数. 我们首先阐述一下外微分形式的基本性质.

Def 2.20 设 D 是平面参数区域, 定义 $\Lambda^k(D)$ 为所有 D 上的光滑 k-形式组成的几何, 即低维时

$$\Lambda^0(D) = C^\infty(D),\ \Lambda^1(D) = \{f\,\mathrm{d}u + g\,\mathrm{d}v \mid f,g \in C^\infty(D)\},\ \Lambda^2(D) = \{f\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \mid f,g \in C^\infty(D)\},$$

其中 $\wedge$ 表示外微分形式的外积, 满足 $\forall \theta_1, \theta_2, \omega \in \Lambda^1$, $f_1, f_2 \in \Lambda^0(D)$, 有

1. 线性性: $(f_1\theta_1 + f_2\theta_2)\wedge\omega = f_1(\theta_1\wedge\omega) + f_2(\theta_2\wedge\omega)$;
2. 反交换性: $\theta_1 \wedge \theta_2 = -\theta_2 \wedge \theta_1$.

Def 2.21 定义外微分算子 $\mathrm{d}: \Lambda^k(D) \to \Lambda^{k+1}(D)$, 使得

1. $\mathrm{d}(f) = f_u\,\mathrm{d}u + f_v\,\mathrm{d}v$;

2. $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}u+g\,\mathrm{d}v)=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}u+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}v=(g_u-f_v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

Thm 2.19 外微分算子的性质: $\forall\theta\in\Lambda^1$, $f,g\in\Lambda^0(D)$, 有

1. $\mathrm{d}(fg)=g\,\mathrm{d}f+f\,\mathrm{d}g$;
2. $\mathrm{d}(f\theta)=\mathrm{d}f\wedge\theta+f\,\mathrm{d}\theta$;
3. $\mathrm{d}(\theta f)=\mathrm{d}\theta\cdot f-\theta\wedge\mathrm{d}f$;
4. Poincare 引理: $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$.

下面我们重新推导 Gauss-Codazzi 方程. 取曲面 S 的正交标架 $\{r;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 运动方程为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^3\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j,$$

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 外微分, 得到

$$\begin{aligned}0=&\mathrm{d}\left(\sum_{\alpha=1}^2\omega_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^2\left(\mathrm{d}\omega_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha-\omega_\alpha\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\alpha\right)\\=&\left(\mathrm{d}\omega_1-\sum_{\alpha=1}^2\omega_\alpha\wedge\omega_{\alpha1}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\mathrm{d}\omega_2-\sum_{\alpha=1}^2\omega_\alpha\wedge\omega_{\alpha2}\right)\boldsymbol{e}_2-\sum_{\alpha=1}^2\omega_\alpha\wedge\omega_{\alpha3}\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

将上式分别对 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 内积, 得到

$$\mathrm{d}\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad \mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12},\quad \omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}=0.$$

由 B 的定义, 第三个方程的含义就是 B 是对称矩阵, 前两个方程是结构方程的一部分.

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i$ 外微分, 得到

$$\begin{aligned}0=&\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^3\omega_{\alpha j}\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{j=1}^3\left(\mathrm{d}\omega_{\alpha j}\boldsymbol{e}_j-\omega_{\alpha j}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j\right)\\=&\sum_{k=1}^3\left(\mathrm{d}\omega_{\alpha k}-\sum_{j=1}^3\omega_{\alpha j}\wedge\omega_{jk}\right)\boldsymbol{e}_k,\end{aligned}$$

因此我们有

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha k}-\sum_{j=1}^3\omega_{\alpha j}\wedge\omega_{jk}=0,\ (\alpha=1,2;\ k=1,2,3).$$

特殊地, $k=1$ 或 $k=2$ 时, 非零的 $\omega_{\alpha k}$ 只能是 $\omega_{21}=-\omega_{12}$; 当 $k=3$ 时是关于 ω_{13} 和 ω_{23} 的外微分满足的方程. 具体写出, 即:

Thm 2.20 称下式为曲面的 Gauss-Codazzi 方程:

$$
\mathrm{d}\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32},\quad \begin{cases}\mathrm{d}\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23}\\ \mathrm{d}\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}\end{cases}
$$

其中左式称作 Gauss 方程, 右二式称作 Codazzi 方程. 它们和方程

$$
\mathrm{d}\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad \mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}
$$

并称为曲面正交标架的结构方程式.

上述五式是正交标架运动方程的可积性条件. 此时的 Gauss 绝妙定理为:

Thm 2.21 正交活动标架下的 Gauss 绝妙定理:

$$
\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2,\ K=-\frac{\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}
$$

特殊地, 若曲面的参数 (u,v) 是正交参数系, $F\equiv 0$, 这时有

Thm 2.22 正交参数系下的 Gauss 方程:

$$
-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)=\frac{LN-M^2}{EG}.
$$

Thm 2.23 正交参数系下的 Codazzi 方程:

$$
\begin{cases}\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u=N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}+M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\\ \left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v=L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}+M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\end{cases}
$$

若对正交标架的 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 旋转角度 θ, 则得到一组新标架 $\{\boldsymbol{r};\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, $\tilde{\omega}_i,\tilde{\omega}_{ij}$ 是相应的诸微分形式. 于是

$$
\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2,
$$

$$
\tilde{\omega}_1=\cos\theta\omega_1+\sin\theta\omega_2,\quad \tilde{\omega}_2=-\sin\theta\omega_1+\cos\theta\omega_2,
$$

$$
\tilde{\omega}_{13}=\cos\theta\omega_{13}+\sin\theta\omega_{23},\quad \tilde{\omega}_{23}=-\sin\theta\omega_{13}+\cos\theta\omega_{23},
$$

由此不难验证, 以下是曲面的几何量, 与正交标架的选取无关:

1. 第一基本形 $\mathrm{I}=\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2=\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_2$;
2. 曲面的面积元 $\mathrm{d}A=\omega_1\wedge\omega_2=\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2$;

3. 第二基本形 $\mathrm{II} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = \tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_{23}$;
4. Gauss 映射的面积元 $\mathrm{d}\sigma = \omega_{13} \wedge \omega_{23} = \tilde{\omega}_{13} \wedge \tilde{\omega}_{23} = K\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$;
5. Hopf 恒等式 $\psi = \omega_1\omega_{23} - \omega_2\omega_{13} = \tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_{23} - \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_{13}$.

但是特别地, 联络形式有 $\tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + \mathrm{d}\theta$, 说明联络形式不是几何量. 他们的几何意义将在曲面的内蕴几何学中进一步阐述.

3 Intrinsic Surfaces

Gauss 绝妙定理告诉我们 Gauss 曲率由曲面的第一基本形决定,这是所谓内蕴几何的开端,内蕴的含义是度量蕴含几何. 第一基本形实质上是一个正定二次微分式,我们可以直接把定义在参数区域上的一个正定二次微分式视为度量,由此出发研究它的几何学. 这是 Riemann 几何的开端. 首先我们重述等距变换:

Def 3.1 设 S 和 $\tilde{S}$ 是 E^3 的两张曲面,σ 为 S 到 $\tilde{S}$ 的一个双射. 若 S 上的任意曲线 C 与 $\tilde{C}=\sigma(C)$ 长度相等, 则称 σ 为 S 到 $\tilde{S}$ 的等距变换 (isometry).

两个等距的曲面不一定是合同的. 将一张纸卷成圆筒, 圆筒与铺平的纸当然是等距的, 但它们不能通过 E^3 的运动叠合到一起.

Prop 3.1 设曲面 S 和 $\tilde{S}$ 的参数表示分别为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{u},\tilde{v})$, S 与 $\tilde{S}$ 之间的双射 $\sigma(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$ 是等距对应的充要条件是在对应 σ 下, 它们的第一基本形满足

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_\sigma \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \boldsymbol{J}_\sigma^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{J}_\sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Proof. 考虑弧长微元 $\mathrm{d}s$, 代入

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & \mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\tilde{s}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{u} & \mathrm{d}\tilde{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{u} \\ \mathrm{d}\tilde{v} \end{pmatrix}$$

即可. □

用正交标架来描述等距变换更为方便.

Prop 3.2 设 σ 是曲面 S 和 $\tilde{S}$ 间的双射, σ 为等距变换的充要条件是: 可以选取适当的正交标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 和 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3\}$ 使得在对应点

$$\omega_1=\tilde{\omega}_1, \quad \omega_2=\tilde{\omega}_2.$$

为进一步理解等距变换, 我们引进切映射的概念.

取切向量 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v\in T_PS$, 若 S 上的曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$ 满足

$$\boldsymbol{r}(0)=P, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0)=a\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{v},$$

则 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\sigma\circ\boldsymbol{r}(t)$ 是曲面 $\tilde{S}$ 上的曲线, $\tilde{\boldsymbol{r}}(0)=\sigma(P)$, 它在 $t=0$ 处的切向量

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{v}}&=\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}(0)=\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{u}}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}(0)+\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{v}}\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}t}(0)\\&=\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{u}}\left(a\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+b\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\right)\Big|_{t=0}+\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{v}}\left(a\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}+b\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\right)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

仅依赖于 $\boldsymbol{v}$ 和对应 σ, 而与曲线 $\boldsymbol{r}$ 的选取无关.

Def 3.2　曲面 S 和 $\tilde{S}$ 间的双射

$$\mathrm{d}\sigma:T_PS\to T_{\sigma(P)}\tilde{S}v\to\tilde{\boldsymbol{v}}$$

称为映射 σ 的切映射 (tangent mapping).

不难发现, $\mathrm{d}\sigma$ 是曲面 S 和 $\tilde{S}$ 对应点切平面之间的线性映射, 且在自然标架下, 切映射 $\mathrm{d}\sigma$ 的系数矩阵是 $\boldsymbol{J}_\sigma$, 即

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}\sigma\left(\boldsymbol{r}_u\right)\\\mathrm{d}\sigma\left(\boldsymbol{r}_v\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial u}&\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\\\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial v}&\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{u}}\\\tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}$$

根据命题 1. 2 我们有

Prop 3.3　曲面 S 和 $\tilde{S}$ 之间的双射 σ 是等距变换当且仅当对 S 的任意两个切向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$,

$$\langle\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{v}),\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{w})\rangle=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle.$$

由于等距变换保持曲面的第一基本形, 它也保持曲面上相交曲线在交点处的夹角不变.

Def 3.3　若曲面间的双射 $\sigma:S\to\tilde{S}$ 保持任意两条相交曲线在交点处的夹角不变, 则称其为曲面的保角变换.

保角变换是比等距变换更广泛的一类变换, 保角变换不再保持曲面的第一基本形. 但我们有

Thm 3.1　设 σ 是曲面 S 和 $\tilde{S}$ 之间的双射, 则 σ 是保角变换当且仅当存在正函数 λ 使得在对应点, 曲面 S 和 $\tilde{S}$ 的第一基本形满足

$$\tilde{\mathrm{I}}=\lambda^2\cdot\mathrm{I}.$$

Thm 3.2　任意曲面上每一点都有一个邻域, 它可以和欧氏平面的一个区域间建立保角变换.

若我们在欧氏平面 E^2 取欧氏坐标 (u,v), 它的度量为 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$. 上述定理等价于说, 对曲面上任一点, 存在一个邻域, 它以 (u,v) 为参数, 使得曲面的第一基本形为

$$\mathrm{I}=\lambda^2(u,v)(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v),\quad\lambda\neq0.$$

这样的参数 (u,v) 称为曲面的等温参数 (isothermal parameter).

3.1 Geodesic Line

从本节起我们讨论曲面的内蕴几何. 首先在 S 上取正交标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_3$ 是曲面的法向量. 我们先来讨论联络形式

$$\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2.$$

Prop 3.4 联络形式 $\omega_{12}=-\omega_{21}$ 由方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2,\\ \mathrm{d}\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1\end{cases},\quad \omega_{12}+\omega_{21}=0$$

唯一确定.

此外, 曲面在不同标架下的联络形式有如下关系:

Prop 3.5 设 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_2=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2$ 是曲面的另一组正交标架, 则曲面关于标架 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ 的联络形式

$$\tilde{\omega}_{12}=\omega_{12}+\mathrm{d}\theta.$$

ω_{12} 只依赖于第一基本形 $\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2$, 但它依赖于标架的选取, 不是几何量. 注意到其仅出现在正交标架的运动方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3\\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2=\omega_{21}\boldsymbol{e}_1+\omega_{23}\boldsymbol{e}_3\end{cases}$$

中. 上式将标架切向量的微分分为两部分: 一部分是在法向量上的投影 $\{\omega_{13},\omega_{23}\}$, 它决定曲面的第二基本形; 另一部分是在曲面切平面的投影, 它恰好是联络形式.

Def 3.4 标架微分落在切平面的部分称为标架的协变微分 (covariant differential), 记为

$$D\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2),\quad D\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2,\quad D\boldsymbol{e}_2=\omega_{21}\boldsymbol{e}_1.$$

一般切向量场协变微分: 设 $\boldsymbol{v}=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2$ 是曲面上的切向量场, v 的协变微分 $D\boldsymbol{v}$ 定义为

$$D\boldsymbol{v}=\left(\mathrm{d}f_1+f_2\omega_{21}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\mathrm{d}f_2+f_1\omega_{12}\right)\boldsymbol{e}_2.$$

我们有

Prop 3.6 设 $\boldsymbol{v}$ 是曲面 S 上的切向量场, 它的协变微分 $D\boldsymbol{v}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 在切平面的投影, 即

$$D\boldsymbol{v}=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\langle\mathrm{d}\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_2\rangle\boldsymbol{e}_2.$$

特别地, 切向量场的协变微分与标架的选取无关.

容易验证, 协变微分算子和微分算子性质相近:

Prop 3.7 设 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是曲面的切向量场, f 是曲面上函数, 则

1. $D(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = D\boldsymbol{v} + D\boldsymbol{w}$;
2. $D(f\boldsymbol{v}) = \mathrm{d}f\boldsymbol{v} + fD\boldsymbol{v}$;
3. $D\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle D\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{v}, D\boldsymbol{w}\rangle$.

协变微分的概念来源于在曲面上推广平行的性质: 平移保长度, 夹角且路径无关. 利用协变微分, 可以推广平移的概念到曲面上.

Def 3.5 设 S 是 E^3 的曲面, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 是它的参数表示, P, Q 为 S 上两点, $\gamma : u = u(t), v = v(t)$ 为曲面 S 上连接 P 和 Q 的曲线. 设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ 是沿曲线 γ 的切向量场, 若 $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$, 则称 $v(t)$ 为沿 γ 在 Levi-Civita 意义下平行.

Prop 3.8 设 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ 是曲面 S 上一条参数曲线, $t \in [a, b]$, $\boldsymbol{r}(a) = P, \boldsymbol{r}(b) = Q$. $\forall \boldsymbol{v}_0 = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{e}_2 \in T_PS$, 存在唯一沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的平行切向量场 $\boldsymbol{v}(t)$ 使得 $\boldsymbol{v}(a) = \boldsymbol{v}_0$.

Remark. 即我们可以将切向量 $v_0 \in T_PS$ 沿曲线 $r(t)$ 平行移动.

关于曲面平移的几何性质, 我们有

Thm 3.3 设 $\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t)$ 是曲面 S 上沿曲线 γ 的平行切向量场, 则 $\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = C$ 是常数.

Proof. 设 $\boldsymbol{v} = f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{w} = g_1\boldsymbol{e}_1 + g_2\boldsymbol{e}_2$, 计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_1g_1 + f_2g_2) &= \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}g_1 + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}g_2 + f_1\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t} + f_2\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t} \\ &= -\left(f_2\frac{\omega_{21}}{\mathrm{d}t}g_1 + f_1\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}t}g_2 + f_1g_2\frac{\omega_{21}}{\mathrm{d}t} + f_2g_1\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}t}\right) = 0.\end{aligned}$$

□

Remark. 曲面上的 Levi-Civita 平行性保长度, 夹角; 但与道路的选择有关.

我们来用协变微分的概念研究 (正交标架) 曲面上的曲线.

设 S 是 E^3 的曲面, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(u^1, u^2\right)$ 是 S 的参数表示. $C : \boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right)$ 是 S 上的弧长参数曲线. 沿曲线 C 取曲面的正交标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$, 且 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是正定向的.

Def 3.6 曲面 S 上的弧长参数曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的测地曲率 (geodesic curvature) k_g 定义为

$$k_g = \left\langle\frac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_2\right\rangle.$$

称 $\boldsymbol{k}_g = k_g\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}$ 为曲线的测地曲率向量.

测地曲率是平面曲率在曲面的推广, 它只与曲面的第一基本形有关, 是一个内蕴几何量. 下面我们来比较曲面上曲线的曲率与测地曲率的关系.

由于曲线的测地曲率

$$k_g = \left\langle \frac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle,$$

曲线的法曲率

$$k_n = \left\langle \frac{d^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}, \boldsymbol{e}_3 \right\rangle,$$

不难得出

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = k_g e_2 + k_n \boldsymbol{e}_3, \quad \kappa^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

于是测地曲率向量是曲率向量在切平面的投影. 曲线的弯曲有两部分, 法曲率是由曲面弯曲产生的, 测地曲率是曲线自身在曲面内的弯曲程度.

我们也可用曲面的自然标架表示测地曲率. 设 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(u^1, u^2\right)$ 是曲面的一个参数表示, 根据自然标架的运动方程,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{r}_1 \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{r}_2 \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{r}_\alpha \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\right) \\
&= \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_\gamma + \frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\boldsymbol{r}_\alpha + b_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n},
\end{aligned}$$

因此测地曲率向量

$$\boldsymbol{k}_g = \left(\frac{d^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{r}_\alpha,$$

所以

$$k_g = \langle \boldsymbol{k}_g, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \left\langle \boldsymbol{k}_g, \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \right\rangle.$$

下面的 Liouville 公式常用于计算曲线的测地曲率.

Thm 3.4 Liouville 公式: 设 (u, v) 是曲面 S 的正交参数, $\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v$; $C: u = u(s), v = v(s)$ 是曲面上一条弧长参数曲线. 设 C 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 θ, 则 C 的测地曲率为

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

Proof. 取曲面的正交标架 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}, \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$, 那么 $\omega_1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u, \omega_2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v$, 计算有

$$\omega_{12} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v.$$

由于 C 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 θ, 沿曲线 C 我们取

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \cos\theta e_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2,$$

则可求出 C 的测地曲率

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{D\tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\mathrm{d}s}, \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \right\rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \cos^2\theta \left\langle \frac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle - \sin^2\theta \left\langle \frac{D\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

代入 $\sqrt{E}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \cos\theta, \sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \sin\theta$ 即可. □

取正交标架场 $\boldsymbol{e}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}$, 且有类似于 Frenet 公式的结构:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix},$$

其中 τ_g 叫做曲线的测地挠率.

Def 3.7 曲面上测地曲率等于 0 的曲线称为曲面的测地线 (geodesic line).

显然, 曲线是测地线等价于它的测地曲率向量等于 0.

Thm 3.5 设曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(u^1, u^2\right)$, 则弧长参数曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right)$ 是测地线当且仅当 $\left(u^1(s), u^2(s)\right)$ 满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \end{cases}$$

上述方程组称为曲面的测地线方程.

测地线是平面直线在曲面的推广.

Prop 3.9 设 S 是 E^3 的曲面, P 是 S 上的点, $\boldsymbol{v}$ 是 P 点的单位切向量, 则曲面 S 上存在唯一一条过 P 点的测地线与 $\boldsymbol{v}$ 相切.

由于测地曲率由曲面的第一基本形决定, 曲面的测地线也由曲面的第一基本形决定, 因此, 曲面的测地线在等距变换下不变, 即

Prop 3.10 设 σ 是曲面 S 与曲面 $\tilde{S}$ 之间的一个等距变换, γ 是曲面 S 的测地线, 则 $\sigma\circ\gamma$ 是曲面 $\tilde{S}$ 的测地线.

Prop 3.11 曲面上的正则曲线 C 是测地线当且仅当沿着 C, 曲线的主法向量与曲面的法向量平行.

Cor 任何曲面上的直线都是测地线.

Eg 3.1 球面上的测地线: 是过球心的平面与球面所交的圆.

Eg 3.2 圆柱面上的测地线: 是平行圆和圆柱螺线.

平面上直线段是连接两点的最短线. 在曲面上有相应的结论:

Thm 3.6 设曲线 C 是连接曲面上两点 P 和 Q 的长度最短的曲面上曲线, 则 C 是测地线.

Remark. 曲面上连接两点的最短线是测地线, 但曲面上连接两点的测地线有可能不是最短线. 例如在球面上连接两点的劣弧和优弧都是测地线.

3.2 Geodesic Coordinate

利用测地线, 我们可以建立曲面上与直角坐标系和极坐标系对应的坐标系.

Def 3.8 设 P 为曲面 S 上一点, 过 P 作测地线 C, 设它的弧长参数是 v; 过 C 上各个点作与曲线 C 正交的测地线, 它们的弧长参数记为 u. 于是两组正交的测地线可以形成曲面的一个正交参数网 (u, v), 称为曲面的测地平行坐标系.

测地平行坐标系与直角坐标系类似.

Prop 3.12 测地平行坐标系下的曲面的第一基本形为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G(u,v)\,\mathrm{d}v^2, \quad G(0,v) = 1.$$

然后是测地极坐标系. 测地线上的点可以用弧长作参数, 单位切向量可以用它与一个固定方向的夹角作参数, 这样定义的参数系称作曲面的测地极坐标系.

设 S 是 E^3 的曲面, $P \in S$, $\boldsymbol{v}$ 是 P 点的一个单位切向量, 在 P 点的一个小邻域内可以定义指数映射

$$\exp_P : T_P S \to S,\ \boldsymbol{w} \to \exp_P(\boldsymbol{w}) = \gamma\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}, \rho\right),$$

它是从 $T_P S$ 的一个邻域到 S 的邻域的同胚, 且 $T_P S$ 上的直线 $\rho\boldsymbol{v}$ ($|\boldsymbol{v}| = 1$) 映为过 P 与 $\boldsymbol{v}$ 相切的测地线 $\gamma(\boldsymbol{v}, \rho) = \exp_P(\rho\boldsymbol{v})$.

Def 3.9 取 P 点的正交标架 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 建立 $T_P S$ 的直角坐标系, 对应

$$\boldsymbol{w} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 \to \boldsymbol{r}\left(x^1, x^2\right) = zP(\boldsymbol{w})$$

给出了曲面 S 在 P 附近的参数表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(x^1, x^2\right)$, $\left(x^1, x^2\right)$ 称为以 P 为原点的法坐标系 (normal coordinate).

规定

$$x^1 = \rho\cos\theta, \quad x^2 = \rho\sin\theta,$$

则 (ρ,θ) 也是曲面的参数系, 叫做测地极坐标系.

在测地极坐标系下,

1. ρ 线是切平面 T_PS 的射线 ρv_0 在指数映射下的像;
2. θ 线 $\rho=\rho_0$ 是切平面 T_PS 上以原点为圆心, ρ_0 为半径的圆在指数映射下的像, 称作以 ρ_0 为半径的测地圆.

上述两者都是测地线.

记与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 θ 的 ρ 线为 C_θ, 则 $\{C_\theta \mid \theta\in[0,2\pi]\}$ 是从 P 点出发的一族测地线, $\boldsymbol{r}(\rho,\theta)$ 表示的是测地线 C_θ 上弧长为 ρ 对应的点. 因此测地极坐标系类似于平面的极坐标系.

Prop 3.13 $\left(x^1,x^2\right)$ 是曲面在 P 附近的正则参数 (正交的测地线).

在以 P 为原点的法坐标系 $\left(x^1,x^2\right)$ 下, P 点对应参数区域的原点, 曲面上过 P 点的测地线对应参数区域上从原点出发的直线 $\theta=\theta_0$, 即

$$x^1 = \rho\cos\theta_0, \quad x^2 = \rho\sin\theta_0$$

是曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(x^1,x^2\right)$ 的测地线, 将其代入测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\rho}=0, \quad \alpha=1,2,$$

得到

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0\right)\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\rho}=0, \quad \alpha=1,2,$$

沿测地线 $\theta=\theta_0$ 成立. 令 $\rho\to 0$ 就得到

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P)\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=0}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=0}=0, \quad \alpha=1,2,$$

但 $\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=0}=\cos\theta_0$ 或 $\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=0}=\sin\theta_0$, 由 θ_0 的任意性, 上式不难推出

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P)=0, \quad \alpha,\beta,\gamma=1,2.$$

Thm 3.7 设曲面在以 P 为原点的法坐标系 $\left(x^1,x^2\right)$ 下的第一基本形 $\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$, 则

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)(P)=\left(\delta_{\alpha\beta}\right), \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(P)=0, \quad \forall\alpha,\beta,\gamma=1,2.$$

Thm 3.8 测地极坐标系 (ρ,θ) 有如下性质:

1. $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+G(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\theta^2$;
2. $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$, $\lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$.

Prop 3.14 设 P 是曲面 S 的一点, 则存在 P 点的一个小邻域 U, 使得对任意的 $Q\in U$, 在 U 内连接 P,Q 两点的测地线的长度在所有连接这两点的曲面曲线中最短.

最后我们利用测地极坐标系, 讨论 Gauss 曲率为常数的曲面.

设 S 是 E^3 的曲面, 在测地极坐标系下, $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+G\,\mathrm{d}\theta^2$, 由 Gauss 方程推出 Gauss 曲率

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

当 K 是常数时这是二阶常系数常微分方程, 我们分三种情形来讨论:

1. $K=0$: 求解有通解为
$$(\sqrt{G})_\rho=f(\theta),$$
可得 $f(\theta)=1, g(\theta)=0$, S 的第一基本形为
$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho+\rho^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$
2. $K=\dfrac{1}{a^2}>0$: 求解有通解为
$$\sqrt{G}=f(\theta)\cos\frac{\rho}{a}+g(\theta)\sin\frac{\rho}{a},$$
可得 $f(\theta)=0, g(\theta)=a$, S 的第一基本形为
$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho+a^2\sin^2\frac{\rho}{a}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$
3. $K=-\dfrac{1}{a^2}<0$: 求解有通解为
$$\sqrt{G}=f(\theta)\cosh\frac{\rho}{a}+g(\theta)\sinh\frac{\rho}{a},$$
可得 $f(\theta)=0, g(\theta)=a$, S 的第一基本形为
$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho+a^2\sinh^2\frac{\rho}{a}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

上述讨论表明, 具有相同常 Gauss 曲率的曲面局部间可以建立等距变换.

3.3 Gauss-Bonnet Formula

最后我们来证明著名的局部 Gauss-Bonnet 公式.

Thm 3.9 Gauss-Bonnet 公式: 设 D 是曲面 S 上的单连通区域, ∂D 是分段光滑闭曲线, 设 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 是 ∂D 的顶点的外角, $\mathrm{d}A$ 是 S 的面积元, 则

$$\iint_D K\,\mathrm{d}A + \int_{\partial D} k_g\,\mathrm{d}s + \sum_{i\in I}\alpha_i = 2\pi.$$

Proof. 根据 Liouville 公式,

$$k_g\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2G}G_u\sin\alpha\,\mathrm{d}s,$$

而 $|\boldsymbol{r}_v|^2\,\mathrm{d}v = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_v\rangle = |\boldsymbol{r}_v|\sin\alpha\,\mathrm{d}s$, 故 $\sin\alpha\,\mathrm{d}s = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v$, 代入得

$$k_g\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}\alpha + (\sqrt{G})_u\,\mathrm{d}v.$$

两边积分得

$$\int_{\partial D}\mathrm{d}\alpha = \int_{\partial D} k_g\,\mathrm{d}s - \int_{\partial D}(\sqrt{G})_u\,\mathrm{d}v.$$

由 Green 公式,

$$\int_{\partial D}(\sqrt{G})_u\,\mathrm{d}v = \iint_D (\sqrt{G})_{uu}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

注意 $\mathrm{d}A = \sqrt{G}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$, 代入有

$$\iint_D K\,\mathrm{d}A + \int_{\partial D} k_g\,\mathrm{d}s = \int_{\partial D}\mathrm{d}\alpha.$$

然后考察积分 $\displaystyle\int_{\partial D}\mathrm{d}\alpha$.

1. ∂D 是一段光滑闭曲线: 设为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), s\in[0,l]$, 则 $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \dot{\boldsymbol{r}}(l)$, 代入 $(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}_u) = |\boldsymbol{r}_u|\cos\alpha$, 有 $\cos\alpha(l) = \cos\alpha(0)$. 类似有 $\sin\alpha(l) = \sin\alpha(0)$. 于是

   $$\int_{\partial D}\mathrm{d}\alpha = \alpha(l) - \alpha(0) = 2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

   通过连续形变可以使得 ∂D 落在一个等温坐标系内, 从而可以进一步视为平面简单闭曲线; 这个过程中积分连续变化, 但它是某数的整数倍, 所以其保持恒定. 根据旋转指数定理,

   $$\int_{\partial D}\mathrm{d}\alpha = 2\pi.$$

2. ∂D 是分段光滑闭曲线: 通过使用光滑曲线逼近可以得到

$$\int_{\partial D} \mathrm{d}\alpha = 2\pi - \sum_{i\in I} \alpha_i.$$

综上, 我们得到 Gauss-Bonnet 公式

$$\iint_D K \,\mathrm{d}A + \int_{\partial D} k_g \,\mathrm{d}s + \sum_{i\in I} \alpha_i = 2\pi.$$

□

下面我们给出 Gauss-Bonnet 公式的两个简单应用.

Eg 3.3　曲面三角形的内角和:

D 是曲面上的一个三角形, 三个内角分别为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 若 $\beta_i + \alpha_i = \pi (i = 1, 2, 3)$, 则

$$\iint_D K \,\mathrm{d}A + \int_{\partial D} k_g \,\mathrm{d}s = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi.$$

当三角形 D 的三边都是测地线时,

$$\iint_D K \,\mathrm{d}A = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi.$$

若曲面是 Euclid 平面,

1. $K \equiv 0$ 时, 测地三角形内角和等于 π;
2. $K > 0$ 时, 测地三角形内角和大于 π;
3. $K < 0$ 时, 测地三角形内角和小于 π.

当曲面的 Gauss 曲率是非零常数时, 曲面测地三角形的内角和减去 π 与它的面积成比例.

Eg 3.4　曲面上向量沿闭曲线平移产生的角度差:

设 C 是曲面 S 上的一条光滑闭曲线, 参数表示为 $\boldsymbol{r}(s), s \in [0, l]$, 它围成一个单连通区域 D. 取 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是 S 的正交标架, 则沿 C 的平行切向量场 $\boldsymbol{v}(s)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v}(s) = \cos\beta \boldsymbol{e}_1 + \sin\beta \boldsymbol{e}_2.$$

其中 $\beta = \beta(s)$ 是 $\boldsymbol{v}(s)$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角. 由 $\boldsymbol{v}(s)$ 的平行性,

$$0 = \frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}(-\sin\beta \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta \boldsymbol{e}_2) + \cos\beta \frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_2 + \sin\beta \frac{\omega_{21}}{\mathrm{d}s} e_1,$$

上式两边与 $(-\sin\beta \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta \boldsymbol{e}_2)$ 作内积就得到

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \mathrm{d}\beta = -\omega_{12}.$$

设 α 是曲线 C 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角, 则 $\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta = k_g \,\mathrm{d}s$, 沿 C 积分可得

$$\int_C \mathrm{d}\beta = \int_C (\mathrm{d}\alpha - k_g \,\mathrm{d}s) = 2\pi - \int_C k_g \,\mathrm{d}s = \iint_D K \,\mathrm{d}A.$$

因此向量 $\boldsymbol{v}(0)$ 沿 C 平移一周后, 得到的 $\boldsymbol{v}(l)$ 与 $\boldsymbol{v}(0)$ 的角度差为

$$\beta(l) - \beta(0) = \int_C \mathrm{d}\beta = \iint_D K \,\mathrm{d}A.$$