读书报告

丁同仁《常微分方程》

尤秉礼《常微分方程补充教程》

GTM182.Ordinary Differential Equations,Walter.W

2022/12/29

前言

该读书报告聚焦于解的存在性与唯一性定理, 是对常微分方程一般定性理论课本内容以外的学习.

在第一部分中, 我们引入泛函分析中的 Banach 压缩映像原理与 Schauder 不动点定理, 整理了 Picard 定理运用 Banach 压缩映像的证明过程, 说明了 Euler 折线的差分本质, 并利用 Schauder 不动点定理给出了 Peano 定理的新证明.

在第二部分中, 我们引入了 Kamke 函数并对比较定理给出了 Kamke 函数下的推广, 参考了 Kamke 在 1931 年发表的论文, 并对里面的 Kamke 一般唯一性定理进行了介绍. 最后, 我们引入了整体唯一性定理作为本报告的结尾.

目录

1 解的局部存在性

在本部分, 我们研究方程组

$$(E): \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x),\ (t \in \mathbb{R},\ x, f \in \mathbb{R}^n)$$

其中 $f(t,x)$ 是在 $n+1$ 维空间 (t,x) 或 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中某一区域 G 上定义的 n 维实值向量函数.

若给定一点 $(\tau,\xi) \in G$, 这里 τ 是一实常数, ξ 是 n 维实向量, 则有如下的 Cauchy 问题：求在含 τ 的某一区间 Δ 上可微的向量函数 $\varphi(t)$, 使得

(1) $\varphi(\tau) = \xi$;

(2) $(t, \varphi(t)) \in G, t \in \Delta$;

(3) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in \Delta$.

Cauchy 问题一般简记作

$$(E): \quad \frac{dx}{dt} = f(t,x), x(\tau) = \xi.$$

若存在满足上述条件的函数 $\varphi(t)$, 则称 $\varphi(t)$ 为 (E) 满足初值 $\varphi(\tau) = \xi$ 或过点 (τ, ξ) 的一个解. 本节中, 我们聚焦于该解的存在性. 在大多情况下, 仅考虑平面上的曲线, 而不考虑二维以上的微分流形; 在不易混淆的前提下, 我们将向量 $\vec{x}$ 或 $\boldsymbol{x}$ 一律表示作 x.

探究解的存在性问题主要有两种方法：一种是基于用近似解逼近精确解, 从而证明解的存在性; 该证明方法同时也包含了获得精确解的一个构造, 从而提供了近似求解的一种途径. 另一种是把解的存在性问题转化为某一变换的不动点的存在性问题, 该方法使用比较简单, 是在前一种方法基础上的抽象和概括.

下面我们探究几种常见的基本方法.

1.1 Picard 逐次逼近与 Euler 折线

定义 1 对二元函数 f, 若在区域 D 内恒成立不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|\,,\ (L > 0),$$

则称函数 f 在区域 D 内对 y 满足 Lipschitz 条件.

容易证明, 若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上对 y 有连续偏导, 则 $f(x,y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件.

定理 1 Picard 定理：对区域 $D \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ 内的连续函数 $f(x,y)$, 若其对 y 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题 (E) 在区间 $I = |x - x_0| \le h$ 上有且只有一个解, 其中常数

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

事实上, 这里 h 的作用体现为确保 $(t, y_n(t))$ 落在 f 定义域 D 内.

证明概要 注意到原方程与积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ 等价, 构造序列:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t,$$

则 $\{y_n(x)\}$ 被称作 Picard 序列, 它在 I 上连续, 一致收敛于初值问题 (E) 的解. □

从泛函分析来看, 各种不同类型问题的逐次逼近法都蕴含一个共同的内容, 一般被称作 Banach 压缩映像原理. 内容如下:

定理 2 Banach 压缩映像原理: 设 D 是 Banach 空间 $X, \|\cdot\|$ 的一个非空闭子集, T 是 D 到其自身内的映射且在 D 内满足 Lipschitz 条件, 则必存在唯一的 $x^* \in D$, 使得 $Tx^* = x^*$, 即 T 在 D 内有唯一的不动点 x^*.

我们略去通过 Banach 压缩映像原理对上述 Picard 定理的证明.

人们很早就考虑了右端函数 $f(x, y)$ 不满足 Lipschitz 条件的情况, 如方程 $y' = \sqrt{|y|}$. 这里, 一个很重要的问题是: 为证明解的存在性, 是否只要 f 具备连续性就够了? Peano 第一个给这个问题以正面解答, 并建立了解的局部存在性定理, 即

定理 3 Peano 定理: 对在区域 $D: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ 内的连续函数 $f(x, y)$, 则初值问题

$$E: \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,$$

在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少存在一个解, 其中常数

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

关于该定理的证明有很多方法, 基于几何直观考虑我们选取如下的 Euler 折线法:

证明概要 对上述初值问题 (E), 记沙漏形区域

$$\Delta_h = \left\{(x, y) \big| |y - y_0| \le M, |x - x_0| \le Mh\right\},$$

则曲线 $\Gamma: y = y(x)$, $(|x - x_0| \le h)$ 处在区域 Δ_h 中. 我们进行如下构造:

(1) 把区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 进行 $2n$ 等分; 作直线 $l_k: x = x_0 + \frac{kh}{n}(-n \le k \le n)$; 记 $P_0 = (x_0, y_0)$;

(2) $\forall 0 \le k \le n - 1$, 递归定义 $P_{k+1}: P_{k+1} = l(P_k) \cap l_{k+1}$, 其中 $l(P)$ 表示 P 的线素, 负数类似;

(3) 得到折线 $\gamma_n = [P_{-n}, \cdots, P_{-1}, P_0, P_1, \cdots, P_n] \subset \Delta_h$.

此时设 $P_k(x_k, y_k)$, 则

$$y_k = \begin{cases} y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}) & k > 0 \\ y_{k+1} + f(x_{k+1}, y_{k+1})(x_k - x_{k+1}) & k < 0 \end{cases}$$

则 γ_n 称为初值问题 E 的 Euler 折线. 设其函数表达式为 $y=\varphi_n(x)$, 则

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} y_0+\sum_{k=0}^{s-1} f\left(x_k, y_k\right)\left(x_{k+1}-x_k\right)+f\left(x_s, y_s\right)\left(x-x_s\right) & s \geq 0 \\ y_0+\sum_{k=0}^{-s-2} f\left(x_k, y_k\right)\left(x_{k-1}-x_k\right)+f\left(x_{s+1}, y_{s+1}\right)\left(x-x_{s+1}\right) & s<0\end{cases}$$

其中 $s=\left[\dfrac{n\left(x-x_0\right)}{h}\right]$, 即 $x_s<x \leq x_{s+1}$. □

事实上, 上述 y_k 的构造过程也可利用差分

$$\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}=f(x_{k-1}, y_{k-1})$$

得到. 该方程实际上就是 Cauchy 问题 (E) 中将微商换作差分, 于是 Euler 折线法又被称作差分法.

1.2 Schauder 不动点

定理 4 Schauder 不动点定理：设 K 是 Banach 空间 $X, \|\cdot\|$ 的一个有界凸闭集, T 是 K 到其自身内的任一全连续映射, 则 T 在 K 内至少有一个不动点.

这里, T 全连续是指它将 K 的任一有界闭集均映为相对紧集.

下面, 我们考虑通过该定理证明上述 Peano 存在性定理.

证明概要 考虑 I 上的一切连续函数所构成的空间 C, 赋予其范数

$$\|y(\cdot)\|=\max\{|y(x)|\big|x \in I\},\ (y \in C),$$

则容易验证 X 是 Banach 空间. 于是考虑 X 的子集

$$K=\{y(\cdot)\big|y(\cdot) \in C, \|y(\cdot)-y_0\| \leqslant Mh\}$$

和 K 上的积分算子

$$(T(y))(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s, y(s))\, \mathrm{d}s,\ y \in K,$$

于是只要证明算子 T 在 K 上有一个不动点.

由定义, 不难证明 K 是一凸闭集, 从而易得 T 是 $K \rightarrow K$ 的算子. 此时, 考虑 $y^*, y_i \in K$, $(i \in \mathbb{N}_+)$ 且 y_i 收敛至 y^*, 则显然 y_i 一致收敛于 y^*, 从而由

$$\lim_{i \rightarrow \infty}(T(y_i))(x)=\lim_{i \rightarrow \infty} y_0+\int_{x_0}^x f(s, y(s))\, \mathrm{d}s=(T(y^*))(x)$$

说明 T 在 K 上连续, 它显然是等度连续. 于是由 Ascoli-Arzela 引理则知 $T(K)$ 相对紧, 这便证明了上述 Peano 存在性定理. □

定理 5 Ascoli-Arzela 引理：设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上一致有界且等度连续, 则可选取它的一个在 $[a, b]$ 上一致收敛的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$.

2 唯一性定理

我们研究初值问题

$$(E): \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

的解的唯一性. 显然仅假定方程的右端函数连续不足以保证解的唯一性. 这样, 自然产生如下的问题：函数 $f(x,y)$ 应具备什么条件, 才能保证初值问题的解是唯一的?

对这一问题的研究, 从 Cauchy 起已经有很多, 其中最古典的一个是 Lipschitz 条件. 1931 年 E. Kamke 给出了比较一般的一个唯一性定理, 后来该 Kamke 定理又得到了推广. 另一方面, Van Kampen 也通过其他角度得到了很多相关成果. 本部分, 我们讨论 Kamke 一般唯一性定理及其部分推论.

2.1 Kamke 函数与比较定理

首先给出 Kamke 函数的相关概念. 事实上, 在常微分方程部分, Kamke 函数概念的引入灵感来源于将两个纯量方程的比较推广到方程组中同一个方程的比较.

定义 1 对 $\mathbb{R}^n$ 上的实值连续函数 $S(x)$, 若其具有下列性质, 则称 $S(x)$ 为 Kamke 函数：

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $S(x) \geqslant 0$, 且 $S(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $S(x)$ 是正齐次函数, 即 $\forall \lambda > 0$, $S(\lambda x) = \lambda S(x)$;

(3) $S(x)$ 具有次可加性, 即 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $S(x+y) \leqslant S(x) + S(y)$.

若 Kamke 函数 $S(x)$ 也满足 $\forall x, S(-x) = S(x)$, 则称 $S(x)$ 为偶 Kamke 函数. 事实上, Kamke 函数必满足 Lipschitz 条件. 此时, 我们能将第一比较定理进行推广, 即

定理 1 设 $f(x,y) \in C(G)$, $F(x,z) \in C(D)$, 这里区域 $G \in \mathbb{R}^{n+1}$, 区域 $D \in \mathbb{R}^2$ 包含所有 $(x, S(y))$, $((x,y) \in G)$, 且 $S(y)$ 是 Kamke 函数. 若

$$\forall (x,y) \in G,\ S(f(x,y)) < F(x, S(y)),$$

设 $y = \varphi(x), z = \psi(x)$ 分别为 Cauchy 问题

$$y' = f(x,y), \varphi(x_0) = y_0,\ \ z' = F(x,z), \psi(x_0) = z_0$$

的解, 则有如下比较定理：

(1) $S(y_0) \leq z_0$ 时, $\forall x > x_0$ 且属于 $\varphi(x), \psi(x)$ 的共同存在区间, 则 $S(\varphi(x)) < \psi(x)$;

(2) $S(y_0) \geq z_0$ 时, $\forall x < x_0$ 且属于 $\varphi(x), \psi(x)$ 的共同存在区间, 则 $S(\varphi(x)) > \psi(x)$.

它的证明十分复杂, 这里仅给出大致思路：

证明概要 (1) 通过定义证明：对 Kamke 函数 $S(x), \forall y, z \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = S(y + xz)$ 在 $x = 0$ 处的左右导数 $D_{\pm}F(0)$ 存在且有限, 并满足 $-S(-z) \le D_{\pm}F(0) \le S(z)$;

(2) 将 y 扩充到 $\varphi(x)$, 它满足 $-S(-D_{\pm}\varphi(x)) \le D_{\pm}S(\varphi(x)) \le S(D_{\pm}\varphi(x))$;

(3) 分情况 $S(y_0) < z_0$ 与 $S(y_0) = z_0$, 分别说明 $x > x_0$ 且与 x_0 充分靠近时, $S(\varphi(x)) < \psi(x)$;

(4) 接下来类似比较定理的原证明过程即可. □

定理 2 第二比较定理的推广：设 $f(x, y), F(x, z)$ 满足定理 1 的条件, 但当 $(x, y) \in G$ 时有 $S(f(x, y)) \le F(x, S(y))$. 若 $y = \varphi(x)$ 与 $z = \psi(x)$ 分别是初值问题

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0, \quad z' = F(x, z),\ y(x_0) = S(y_0)$$

在 $a < x < b$ 上的解, $x_0 \in (a, b)$ 且 $\psi(x)$ 在 $x_0 \le x < b$ 上是后一方程的最大解, 在 $a < x \le x_0$ 上是最小解, 则 $x_0 \le x < b$ 时 $S(\varphi(x)) \le \psi(x)$; $a < x \le x_0$ 时 $S(\varphi(x)) \ge \psi(x)$.

它的证明过程与第二比较定理的证明过程完全类似, 不再赘述.

2.2 Kamke 一般唯一性定理

首先我们注意到探究解的唯一性问题时, 若给定方程组

$$(E): \ y' = f(x, y),$$

于是在某种意义上可将其化作比较定理的一个应用.

事实上, 若 (E) 过点 (x_0, y_0) 有两解 $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, 则令 $z = y - \varphi(x)$, 原方程组可化作

$$(E)': \ z' = f(x, z + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x)) \equiv g(x, z).$$

此时, $h(t) = \psi(x) - \varphi(x)$ 便是 $(E)'$ 过点 $(x_0, 0)$ 的一个解. 于是只要说明 $(E)'$ 过 $(x_0, 0)$ 只有零解.

考虑通过 Kamke 函数 $S(x)$ 对 $(E)'$ 的解与 $(E_1): \ z' = \omega(x, z)$ 的解进行比较, 在 $\omega(t, z)$ 和 $f(x, y)$ 之间通过 $S(x)$ 建立某种关系, 使方程 (E_1) 过 $(x_0, 0)$ 只有零解. 整理思路之后我们得到了如下的定理：

定理 3 Kamke 一般唯一性定理：对 $x \in (0, a), z \ge 0$ 上的非负连续函数 $\omega(x, z), \omega(x, 0) = 0$, 且

$$\forall \alpha \in (0, a), \quad (E_1): \ z' = \omega(x, z),\ 0 < x \le \alpha$$

满足 $z(0) = z'_+(0) = 0$ 的可微解只有 $z = 0$. 若函数 $f(x, y)$ 在区域 $G \in \mathbb{R}^{n+1}: |x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ 上连续, 且对任一偶 Kamke 函数 $S(x)$, $x \ne x_0$ 时有

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G, \ S(f(x, y_1) - f(x, y_2)) \le \omega(|x - x_0|, S(y_1 - y_2)),$$

则方程组 $(E): \ y' = f(x, y)$ 在 G 内过 (x_0, y_0) 的解唯一.

证明概要 不失一般性, 不妨 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 设 (E) 过 $(0,0)$ 有两个解 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$ 且在同一区间 $r < x < t$ 有定义, 这里 $-\alpha \le r < 0 < t \le \alpha$.

首先证明: 在 $0 \le x < t$ 上 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 重合, 即 $g(x) = \varphi(x) - \psi(x) = 0$, $(0 \le x < t)$. 否则, 则 (E) 过 (σ, η) 必存在唯一左行饱和最小解 $\rho(x) \ge 0$, 这里

$$\sigma \in (0,t),\ g(\sigma) \ne 0,\ \eta = S(g(\sigma)) > 0.$$

设 $\rho(x)$ 的存在区间为 $0 \le \sigma' < x \le \sigma$, 我们可以类似 §2.1 定理 1 的证明过程, 并运用第二比较定理的推广形式, 得到:

$$S(g(x)) \ge \rho(x) > 0,\ (0 \le \sigma' < x \le \sigma).$$

进一步通过 ρ 的饱和性与延伸定理, 证明 $\sigma' = 0$, 即 $\rho(x)$ 的存在区间为 $0 < x \le \sigma$. 定义 $\rho(0) = 0$, 运用 §2.1 定理 1 证明概要 (2) 的结论, 得到 $\rho'_+(0) = 0$. 这便证明了 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 $0 \le x < t$ 重合.

然后利用第二比较定理的推广形式, 利用不等式

$$D_+S(g(x)) \ge -S(-g'(x)) = -S(y'(x)) \ge -\omega(|x|, S(g(x))).$$

即可得到 $r \le x < 0$ 上的重合性. 具体过程留待读者完善. $\square$

推论 *设 $f(x,y)$ 在区域 $R \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$ 上连续且满足广义 Lipschitz 条件:*

$$S(f(x,y_1) - f(x,y_2)) \le LS(y_1 - y_2),$$

这里 $S(x)$ 是偶 Kamke 函数, $L > 0$ 是 Lipschitz 常数, 则方程组 (E) 在 R 内过 (x_0, y_0) 的解唯一.

事实上, 在 Kamke 定理中取 $\omega(x,z) = Lz$ 即得到该推论.

2.3 整体唯一性定理

最后, 我们介绍如下的整体唯一性定理:

定理 4 *设 $f(x,y) \in C(G)$, 其中区域 $G \in \mathbb{R}^{n+1}$. 若方程组 (E) 过 G 内每一点都局部存在唯一解, 则 (E) 过 G 内每一点在整个区域 G 内都必存在唯一的饱和解.*

证明概要 存在性显然, 只证明唯一性. 任取 $(x_0, y_0) \in G$, 设 $y = \varphi(x)$ 和 $y = \psi(x)$ 是过 (x_0, y_0) 的两个饱和解, 于是只需证明在二者的共同存在区间上有 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

利用反证法, 设 $x_1 > x_0$, $\varphi(x_1) \ne \psi(x_1)$, 于是有

$$\exists x_2 \ge x_0,\ \varphi(x_2) = \psi(x_2),\ \forall x \in (x_2, x_1),\ \varphi(x) \ne \psi(x).$$

但是对充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $(x_2, \varphi(x_2))$ 的邻域 $V \in G$, 使得方程组 (E) 在 V 内过 $(x_2, \varphi(x_2))$ 的解唯一且当 $|x - x_2| \le \varepsilon$ 时,$(x, \varphi(x)), (x, \psi(x)) \in V$. 这便推出 $\varphi(x) = \psi(x)$, 矛盾！定理得证. $\square$