密

封

山东大学 2022-2023 学年 春季 学期 实变函数 课程试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、集合与测度（共 53 分）

1.（10 分）（1）陈述可数集的定义；

（2）给定可数集 S，求 S 的有限子集全体的基数。

2. （13 分）陈述关于R^d的子集可测性的 Caratheodory 条件，并以之证明两个可测集的并集是可测集。

3.（15 分）设E, F为实数集R的可测子集，证明对任何实数a，点集$\{x-y: x\in E, y\in F, x+y=a\}$可测。

4.（15 分）（1）陈述 Lusin 定理；

（2）设 f 为(a,b)上的可测函数，$\epsilon > 0$，证明(a,b)上存在有界的连续函数 g，使$m\{f \neq g\} < \varepsilon$.

得分	阅卷人

二、积分理论（共 47 分）

5. （12 分）计算积分$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin^n\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dm$.

6. （15 分）设f, g为R上的可积函数，定义

$(f * g)(x) = \int_R f(t)g(x-t)dm(t)$,

证明$f * g$可积，并且 $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.

7.（20 分）（1）陈述绝对连续函数的定义；

(2) 陈述 Stieltjes 测度的定义；

(3) 设$[a,b]$上绝对连续的递增函数ρ诱导了 Stieltjes 测度μ，f为$[a,b]$上的 Borel 可测函数，证明

$\int_a^b f\, d\mu=\int_a^b f\rho'\, dm$