

## 高代一期末

1. 对域  $\mathbb{F}$  上的多项式环  $F[x]$  以及集合  $I \in F[x]$ , 若  $I$  满足以下两条性质:

(1) 若  $f, g \in I$ , 则  $f - g \in I$ , (2) 若  $g \in I$ , 则  $\forall f \in F[x], f \cdot g \in I$ ,

证明:  $\exists g \in I$ , 使得  $I = \{f \cdot g | f \in F[x]\}$ .

2. 若整系数多项式  $f(x)$  满足  $f(a_i) = 5, a_i \in \mathbb{Z} (i = 1, \dots, 5)$ , 证明:  $f(x)$  没有整数根.

3. 求行列式的值: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

4. 若  $f_i(x), (i = 1, \dots, n)$  是  $n$  个次数不超过  $n - 2$  次的多项式, 记  $a_{ij} = f_i(a_j), a_j \in \mathbb{R}$ .

证明:  $|A| = (a_{ij})_{n \times n} = 0$ .

5. 若不超过  $n - 1$  次的多项式  $f(x)$  满足  $f(a_i) = b_i, (i = 1, \dots, n)$ , 其中  $a_i$  是互异实数.

证明:  $f(x)$  存在且唯一.

6. 探索矩阵方程  $AX = B$  有解的充要条件, 其中  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $m \times l$  矩阵.

7. 证明:  $n$  阶实对称阵  $A$  正定的充要条件是存在实非异阵  $C$ , 使得  $A = C'C$ .

8. 化简二次型  $f = 4x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2$  为标准型, 并写出所经历的非退化线性替换.