泛函分析期末

1. (10) 陈述度量空间的定义; 设 $\{a_n\}$ 为度量空间 (X,ρ) 中的 Cauchy 列, 证明存在常数 M 使得 $\forall n,\ \rho(a_n,a_1)\leq M$.

2. (15) 陈述完备赋范空间的定义; 在线性空间

$$c_{00}=\{a=\{a_n\}\mid \exists N,\ \text{s.t.}\ \forall n>N,\ a_n=0\}$$

上定义 $\|a\|=\max\{|a_n|\mid 1\leq n<\infty\}$, 证明 c_{00} 是赋范空间并求其完备化.

3. (15) 陈述 Hilbert 空间的定义; 设 M 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 陈述商空间 H/M 的定义并证明 H/M 与 $M^{\perp}$ 等距同构.

4. (18)

(1) 陈述 $\mathbb{C}$ 上单位圆盘 D 的 Bergman 空间 $L_a^2(D)$ 的定义;

(2) $\forall\lambda\in D$, 证明赋值泛函 $\varphi_\lambda(f)=f(\lambda)$ 是 $L_a^2(D)$ 上的有界线性泛函并求其范数;

(3) 求函数 $K_\lambda\in L_a^2(D)$ 使得 $\forall f\in L_a^2(D),\ f(\lambda)=\langle f,K_\lambda\rangle$.

5. (12) 陈述开映射定理和 Banach 逆算子定理, 并用后者证明前者.

6. (18)

(1) 陈述自反空间和弱 * 拓扑的定义;

(2) 在空间

$$c_0=\{a=\{a_n\}\mid \lim_{n\to\infty}a_n=0\}$$

上赋范 $\|a\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_+}|a_n|$, 证明 c_0 不是自反空间, 但 c_0 在 c_0^{**} 中按弱 * 拓扑稠密.

7. (12)

(1) 陈述紧算子的定义;

(2) 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 证明 A 是紧算子当且仅当 A^*A 是紧算子.