数分三期末

1.(1) 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=3$, 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^4,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. 计算 f 在点 $(1,1,1)$ 处沿 Σ 的外法向的方向导数;

(2) 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 包含在锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 内的部分, 计算它的面积;

(3) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; (4) 设 $F(\alpha)=\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\alpha^2} e^{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x$, 计算 $F'(\alpha)$.

2. 证明右半平面 $(x>0)$ 上的第二类曲线积分

$$\int_L \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 并求可微函数 U 使得 $\mathrm{d}U=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y$ 在右半平面成立.

3.(1) 计算第二类曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 是圆周 $(x-1)^2+y^2=4$, 逆时针方向;

(2) 设 u 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可偏导函数, 令

$$v(\vec{x},r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(\vec{x})} u(\vec{y})\,\mathrm{d}s,$$

其中 $r>0,\vec{x}=(x_1,x_2),\vec{y}=(y_1,y_2)$. 证明: $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{r\to0}v(\vec{x},r)=u(\vec{x}),\lim\limits_{r\to0}\dfrac{\partial v}{\partial r}(\vec{x},r)=0$.

4. (1) 计算三重积分

$$I=\iiint_D (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1,a,b,c>0\right\}.$$

(2) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是有界闭区域, $u(x,y)\in C(\Omega)$ 且 $u(x,y)>0$. 定义

$$\Phi_p(u)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega u^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的面积. 证明: $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi_p(u)=\max\limits_\Omega u,\ \lim\limits_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\min\limits_\Omega u$.

(3) 设 $f(x,y)\ge0$, 在 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$ 上连续可微且 $f\big|_{\partial D}=0$, 则

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le\frac{\pi a^3}{3}\max_D\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

5. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 上的有界光滑区域, $u(x,y,z)$ 是 $\bar\Omega$ 上的二次连续可微函数, $\triangle u=0$. 证明:

(i) $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S=0$, 其中 $\vec{n}$ 是 Ω 的单位外法向;

(ii) 设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 是一固定点, $\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),r=|\vec{r}|$. 则证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S.$$