数分三期中

1(44) (1) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的函数, 叙述 f 在原点 $(0,0)$ 可微的定义.

(2) 探究如下函数在点 $(0,0)$ 处的可微性：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(3) 证明 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上半平面上满足 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

(4) 若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可偏导, 且 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, 证明 $\exists\phi$, 使得 $f(x,y)=\phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

(5) 设 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上可微, $\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的三个线性无关的向量, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l_i}}=0$, $(i=1,2,3)$, 证明 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中恒为常数.

2(12) 设 $B\subseteq\mathbb{R}^n$, $(n\geq 2)$ 是单位开球, 函数 u,v 在 $\bar{B}$ 上连续, 在 B 内二阶连续可导且满足

$$\begin{cases}-\Delta u-(1-u^2-v^2)\,u=0, & x\in B\\ -\Delta v-(1-u^2-v^2)\,v=0, & x\in B\\ u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B.\end{cases}$$

证明: $u^2(x)+v^2(x)\leq 1$, $(\forall x\in\bar{B})$, 其中 Δ 代表 Laplace 算子.

3(16) 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积, 其中 $a>0,b>0,c>0$.

4(13) (1) 令

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leq t^2} f\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, t>0$$

其中 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数且 $f(1)=1$, 计算 $F'(1)$ 的值.

(2) 设函数 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|a\leq x\leq b,\varphi(x)\leq y\leq\psi(x)\}$ 上连续, 其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若 $\forall x\in[a,b]$, $f(x,\varphi(x))=0$, 则 $\exists K\in\mathbb{R}$, 使得

$$\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leq K\iint\limits_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5(15) (1) 设方程 $e^z-xyz=0$ 确定 $z=f(x,y)$ 的隐函数, 计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(2) 设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面开区域 G 上连续可偏导, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0,\ (\forall(x,y)\in G),$$

又设有界闭区域 $D\subset G$. 证明：在 D 中满足方程组 $f(x,y)=0,g(x,y)=0$ 的点至多有有限个.