数分二期末

1 (1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\displaystyle\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$;

(2) 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$, 且补充定义 $f(0)=0$. 则：(i) 证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积;

(ii) 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 那么 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可导? 如果可导, 计算 $F'(x)$.

2 设 $f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}, (x,y)\in\mathbb{R}^2-(0,0)$, 那么 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在? 计算之或给出证明.

3 (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$. 当 $f(x)$ 可积时, 结论如何?

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4 (1) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性, 其中 $p\in\mathbb{R}$.

(2) 如果级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$, 那么级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是否一定收敛?

(3) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p+\sin n}, p\in\mathbb{R}$ 的敛散性 (包括绝对收敛, 条件收敛和发散), 其中 $p>0$.

5 (1) 叙述无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛原理.

(2) 讨论无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\sin(x^p)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 包括绝对收敛, 条件收敛和发散, 其中 $p\in\mathbb{R}$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$. 任取 $0<a<b$, 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 是否收敛?

6 (1) 叙述函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和函数 $S(x)$ 的定义;

(2) 举例说明 $(0,1)$ 上的连续函数列 $f_n(x)$ 的逐点收敛极限 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不一定连续;

(3) 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha}e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$.

(4) 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$ 在 $x\in(0,2\pi)$ 上的一致收敛性, 其中 $\alpha>0$.