数分一期末

1(36) 计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\left(\dfrac{i}{n^2}\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.　(5) 求曲线 $e^{x+y}-xy=e$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

(6) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x\ \left(a^2>b^2\right)$.

2(10) 设 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}, x_{n+1}=\sin x_n$. 证明：　(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$,　(2) $x_n^2\sim\dfrac{3}{n}(n\to\infty)$.

3(20) 请用具体例子或具体证明过程来回答下面的问题:

(1) 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的可微函数,

(i) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 是否一定存在?

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 是否一定存在?

(2)(i) 是否存在 $(-1,1)$ 上的函数 f, 使得 $f''(x)$ 存在但 $f''(x)$ 无界?

(ii) 设 $x_1,\cdots,x_m$ 是 $(0,1)$ 中的任意有限个互不相同的数, 是否存在 $(0,1)$ 上的函数 f, 使得 $f(x)$ 处处可导但 $f'(x)$ 在且仅在 $x_1,\cdots,x_m$ 处不连续?

(3) 是否存在 $\mathbb{R}$ 上满足条件：$\begin{cases}f(x)>0, & x\in(-1,1)\\ f(x)=0, & x\in(-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty)\end{cases}$ 的光滑函数 f?

(注: 如果 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ 在 R 上存在且连续, 则称 f 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数).

4(18) 设 $f(x)$ 是 $(0,1]$ 上的函数, (1) 给出 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续的 $\varepsilon-\delta$ 描述.

(2) 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导且导数连续,

(i) 证明: 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 反之, 若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续,$f'(x)$ 是否一定在 $(0,1)$ 上有界? 请举例说明或给出证明过程.

(ii) 如果将 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界减弱为存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha f'(x)$ 存在, 那么 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是否一定一致连续函数? 请举例说明或给出证明过程.

5(16)(1) 设定义在 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 上二阶可导,

(i) 证明：若 $\forall x\in(0,1)$, $f''(x)+(\sin x)f'(x)-2f(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中取不到非负最大值.

(ii) 若 $\forall x\in(0,1)$, $f''(x)+(\sin x)f'(x)\geq 0$ 且 f 非常值函数, 则 $f(x)$ 最大值能否在 $(0,1)$ 中取到?

(2) 设 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负函数, f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数且满足如下条件：

1) $y(a) \le 0, y(b) \le 0$, 2) $\forall x \in [a,b]$, $y''(x) = f(y(x)) + g(x)$, 3) $\forall y \in \mathbb{R}$, $yf(y) \ge 0$.

证明：$\forall x \in [a,b]$, $y(x) \le 0$.

(iii) 是否存在 $\mathbb{R}$ 上严格单增的可微函数 f 满足 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(f(x))$ 若存在, 给出具体例子; 若不存在, 给出证明.