数分一期中

1(10) 给出下列命题的 $\varepsilon - N(\varepsilon - \delta)$ 语言描述:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛;　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$.

2(30) 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$, 其中 $x\in R$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, 其中 $a\geq 0, b\geq 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, 其中 $\sin a\neq 0$;

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(a_1^x+\cdots+a_m^x)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a_i>0$, $(i=1,\cdots,m)$, $m\in\mathbb{N}_+$ 给定.

(5) 判断数列 $\{\cos n\}$ 的敛散性;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$.

3(10) 设 $p_k>0$, $(k\in\mathbb{N}_+)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

4(20) 回答下列问题 (证明或举反例):

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 都存在收敛子列 $\{a_{n_{k_j}}\}$, 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(2) 如果对每个素数 p, 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{np}\}$ 都收敛于 0. 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛于 0?

(3) 若 $\forall k\in\mathbb{N}_+, \exists N_k\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geq N_k: |a_n-a|<\dfrac{1}{k}$, 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$?

(4)(i) 若 $\forall p\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$, 则 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(ii) 若 $\forall p,n\in N_+$, $|a_{n+p}-a_n|\leq\dfrac{p}{n^2}$, 问 $\{a_n\}$ 是否一定收敛?

(5) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 问数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 是否收敛?

(6)(i) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 中只有第一类间断点, 问函数 f 是否在 $[a,b]$ 上有界?

(ii) 是否存在 $(0,1)$ 上的单调函数 f, 使得 f 在任意有理点不连续, 而在任意无理点连续?

5(10) 设 $A>0$ 且 $a_1>\sqrt{A}$. 令 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{A}{a_n}\right)$, 则:

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{A}$;　　(2) 是否存在常数 $a>1, b>1$ 及 $C>0$, 使得 $a_n-\sqrt{A}\leq\dfrac{C}{a^{b^n}}$?

6(10) 设 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^{\alpha}\sin\frac{1}{\beta}, & x\in(0,1]\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

7(10) 设数集 S 是非空有下界的集合, 则：

(1) 记 $\alpha=\inf S$, 判断在数集 S 中是否可取出单减的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$?

(2) 设 α 是 S 的一个下界; 且数列 $\{a_n\}\subset A$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$. 证明：$\alpha=\inf A$.