21 基地抽象代数 2

1.(20')

(1) 叙述有限 Galois 理论基本定理;

(2) 叙述交换幺环上模的三个同构基本定理.

2. $R \in \mathsf{CRing}$, Abel 范畴 R-Mod. 证明:

(1) 所有 Noether (resp. Artin) R-模构成 R-Mod 的一个 Abelian 全子范畴, 记为 $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{A}$).

(2) 所有有限生成的投射 R-模是 R-Mod 的一个加性全子范畴 $\mathcal{F}$, 但一般不是 Abel 范畴. 请找出对哪些环 $R, \mathcal{F}$ 是 Abel 范畴.

3. Klein 四元群 $G = \{x, y, xy, 1 \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\}$ 的两个 $\mathbb{F}_2$-表示

$$\rho_1 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \rho_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算这两个表示对应的 $\mathbb{F}_2^3$ 的极大半单子模, 从而说明这两个表示都不是半单的.

4. $R \in \mathsf{CRing}$, $I \lhd R$ 有限生成, 证明 TFAE:

(1). R/I 平坦; (2). $I = I^2$; (3). $I = Re$, 其中 $e^2 = e$ 是幂等元.

5.1 交换幺环 $R \subset S$, S 在 R 上整, k 代数闭, 环同态 $\varphi : R \to k$. 证明: 存在环同态 $\psi : S \to k$ 使得 $\psi|_R = \varphi$.

5.2 域 F, $A \in \mathsf{fgAlg}(F)$, 群 $G < \mathrm{Aut}_F A$, $|G| < +\infty$. 证明: $A^G = \{a \in A \mid g(a) = a, \forall g \in G\} \in \mathsf{fgAlg}(F)$.

6. 取 $f(x) = x^5 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$, 证明 $\mathrm{Gal}\, f \cong D_5$ 当且仅当成立如下三个条件:

1. $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. 判别式 $D(f) = 4^4 a^5 + 5^5 b^4 \in \mathbb{Q}^2$;
3. $f(x)$ 根式可解.

7. (选做两个)

1. 证明局部环 R, 则有限生成平坦 R-模自由;
2. $R \in \mathsf{CRing}$, F 是秩 n 自由 R-模, 证明 F 的自由子模 M 秩 $\leq n$;
3. 证明; $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的整闭包不是 Noether 环.