微分几何期末

1. (20) 定理叙述.

(1) 叙述 E^3 中的曲线论基本定理;

(2) 叙述 E^3 中曲面正则参数下的正交标架运动方程.

2. (20) 正则参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (2023 + 8\cos t, 2024 - 6t, 2025 - 8\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(1) 求弧长参数, 弧长参数表达式;

(2) 求曲率, 挠率, Frenet 标架.

3. (20) E^3 中正则参数曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (u^7\cos v, u^7\sin v, u)$, $u > 0$, $0 < v < 2\pi$.

(1) 求第一, 第二基本形;

(2) 求平均曲率, Gauss 曲率.

4. (12) E^3 中正则参数曲面 (伪球面)

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(23 + \cos u \sin v, 24 + \sin u \sin v, 25 + \cos v + \log\tan\frac{v}{2}\right),\ 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < \pi,$$

求 S 上的测地线.

5. (12) E^3 中正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ 没有平点, 若 $K = 0$, 证明 S 是可展曲面.

6. (10)

(1) 正则参数曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$, u, v 是等温参数, 证明 S 是极小曲面的充要条件是其坐标函数满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

(2) 给定 $(0, +\infty)$ 上的光滑函数 $y = f(x)$, 证明存在正则参数曲面 S 使得主曲率 $k_2 = f(k_1)$.

7. (6)

(1) 证明球面上常测地曲率线是圆弧, 此时测地曲率可能的取值是?

(2) 球面上弧长参数的正则闭曲线 $C : \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [0, L]$, 其中 L 是 C 的周长, 证明 C 的全挠率

$$\int_0^L \tau(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

并由此证明: 若 C 的切向量的球面像是简单闭曲线, 则其平分单位球面的面积.