# 实变函数期末

1. (10') 设 $f_k(x) \in L^1(\mathbb{R}_n)$, $(k \in \mathbb{N})$ 且在 $L^1(\mathbb{R}_n)$ 中 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 $f$. 证明 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 $f$.

2. (30') 概念题

(1) 叙述控制收敛定理, 并用控制收敛定理推导有界收敛定理.

(2) 给出有界闭区间 $[a, b]$ 上绝对连续函数的定义, 并证明绝对连续函数是有界变差函数.

3. (10') 设 $E_1, \cdots, E_n$ 是 $[0, 1]$ 上的可测子集且 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m(E_i) > n - 1$, 证明 $m\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0$.

4. (15') 对 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数 $f$, $E_a = \{x \mid |f(x)| > a\}$, $(\forall a > 0)$, 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} m(E_a) \, \mathrm{d}a.$$

5. (15') 对函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 证明 $f$ Lipschitz 连续当且仅当它满足

(1) $f$ 绝对连续; (2) $|f'(x)| \leq L$, a.e. $x$.

6. (10') 对 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可积函数 $f$, 若对任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\int_E f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$, 证明 $f(x) \geq 0$ a.e. $x$.

7. (10') 对 $[0, 1]$ 上的连续单增函数 $f$, 显然 $f$ 几乎处处可微, 证明:

$$\int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}x \leq f(1) - f(0).$$