复变函数期末

一. 填空题

1. $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处的导数为 (　　　　);

2. 设 C 为 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的线段, 则 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$(　　　　);

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{n^3}$ 的收敛半径和收敛圆为 (　　　　);

4. $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 处的留数为 (　　　　);

5. $2z^5-6z^4+z^2+2$ 在单位圆内的零点个数为 (　　　　);

二. 若 $f(z)=axy+i(bx^2+y^2)$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上解析, 试求 a,b 的值, 并计算 $f'(z)$, $f''(z)$.

三. 计算 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2i)}\,\mathrm{d}z$, 其中 (1) $C:|z-2i|=1$;　　　　(2) $C:|z|=3$.

四. 设 $f(z)=\displaystyle\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^3+7\zeta^2}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f(1+i)$, $f'(1+i)$.

五. 设 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 证明 $\exists\delta>0$, 在圆盘 $|z-z_0|<\delta$ 内有幂级数展开 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

六. 求 $e^{-z}\cos z$ 在 $z=0$ 处的 Laurant 展开式.

七. 利用留数定理计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{3x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

八. 设 $f(x)$ 在 z_0 处解析, 设 $w_0=f(z_0)$, 若 $f^{(k)}(z_0)=0$, $(k=1,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$,

(1) 证明 z_0 是 $h(z)=f(z)-w_0$ 的 n 重零点;

(2) $\exists\rho,\mu>0$, 对 $0<|w-w_0|<\mu$, 证明 $g(z)=f(z)-w$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 时有 n 个一重零点.