

常微分方程期末

1. 若 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 试推导其通积分.

2. (1) 若
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{cases}, \mu > 0,$$
 试将其解出一全微分形式后进行首次积分.

(2) 若 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ 连续, $y = \varphi(x)$ 是一个奇解, 请写出其 p -判别式.

3. 猜出微分方程 $2y' = y^2e^{-x} + e^x$ 的一个特解, 并解出其通解.

4. 求解方程 (1) $y^3 dx + 2(x^2 - x^2y) dy = 0$; (2) $x^2y'' + xy' + 9y = x$.

5. 求解方程 $\frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$.

6. 若 $y'' + ay' + by = 0$ 的任何解在 $x \rightarrow \infty$ 时均趋于 0, 试探究 a, b 满足的关系.

7. 考虑微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, 其中 $p(x), q(x)$ 在 (a, b) 上连续,

(1) 设 $y = \varphi(x)$ 是 I 上的一个非零解, 证明 $\varphi(x)$ 在 I 上只有简单零点, 即若 $\varphi(x_0) = 0$, 则 $\varphi'(x_0) \neq 0$;

(2) 若 $u(x), v(x)$ 是其基本解组, 试证明 $u(x), v(x)$ 无公共零点.